Aprender matemáticas con el ordenador

Blanca Bujanda Cirauqui
Chelo Ferreira González

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Aprender matemáticas con el ordenador

Aprender matemáticas con el ordenador

Blanca Bujanda Cirauqui
Chelo Ferreira González

Universidad Pública
de Navarra
Nafarroako
Unibertsitate Publikoa

Colección Matemática e Informática, 3

Título:	*Aprender matemáticas con el ordenador*
Autor:	Blanca Bujanda Cirauqui y Chelo Ferreira González
Edita:	Universidad Pública de Navarra : Nafarroako Unibersitate Publikoa
Fotocomposición:	Pretexto
Imprime:	Ipar
Depósito Legal:	NA 1.027-2004
ISBN:	84-9769-035-4

Coordinación y distribución: Dirección de Publicaciones
Universidad Pública de Navarra
Campus de Arrosadía
31006 Pamplona
Fax: 948 169 300
Correo: publicaciones@unavarra.es

Índice general

Presentación

No nos cabe duda de que los futuros perfiles profesionales de nuestros actuales alumnos universitarios están cambiando vertiginosamente. Uno de los grandes cambios es el que viene dado por la incorporación del ordenador a la mayoría (casi todos) de estos perfiles. Los profesionales precisan ya un alto nivel de conocimientos de informática, que en el caso más habitual es simplemente nivel de usuario, de manejo del ordenador. Por ello las nuevas tendencias de formación en la universidad deben adaptarse a estas necesidades, e incorporar al aula el ordenador, pero no como un complemento, como se ha venido haciendo hasta ahora con las clases denominadas "de prácticas", sino como parte esencial del trabajo. Los profesores y los alumnos debemos concienciarnos de que es posible enseñar y aprender con el ordenador.

Este es el propósito del libro, un curso de matemáticas básicas, con el ordenador, dirigido a alumnos de primer o primeros cursos de aquellas disciplinas donde las matemáticas no son el eje central pero sí fundamental en su formación (Empresariales, LADE, Ingenierías...).

Para ello hemos seleccionado el programa *Mathematica*, que es el que actualmente utilizamos en la Universidad Pública de Navarra y que nos parece una potente herramienta matemática que además comprende la casi totalidad de las ramas de matemáticas. Por otro lado, este texto puede considerarse también de autoaprendizaje del programa *Mathematica*, puesto que es un nivel básico y no se necesitan más que los conocimientos elementales de un primer curso de matemáticas.

El texto consta de seis capítulos, divididos a su vez en secciones. Los dos primeros introducen el programa y su entorno, el resto describen las opciones básicas y utilidades para un primer acercamiento al cálculo, el álgebra, los gráficos y la estadística descriptiva. Además, al final de cada sección se incluye una serie de ejercicios que recomendamos al alumno, ya que están elegidos de forma que sean un test válido del grado de asimilación de lo abordado en esa sección.

Esperamos que el texto sea de verdad una ayuda para el alumno universitario, para que supere su asignatura de matemáticas y descubra las magníficas posibilidades que ofrece un programa como *Mathematica*.

Finalmente, quisiéramos agradecer al profesor José Luis López su inestimable ayuda y sus aportaciones al libro.

Capítulo 1
Introducción

1.1. Introducción al programa *Mathematica*

El programa *Mathematica* es un paquete informático constituido fundamentalmente como una potente herramienta matemática, de hecho comprende la casi totalidad de las ramas de las matemáticas. Éste es uno de los paquetes más conocidos que permiten el cálculo simbólico (estos paquetes se denominan manipuladores algebraicos), es decir, permite trabajar con expresiones matemáticas en forma literal (no evaluadas numéricamente).

Fue creado por Stephen Wolfram en el año 1988 y destaca dentro del resto de programas de cálculo simbólico por su gran capacidad gráfica así como por su facilidad y comodidad para el usuario. Su implementación está hecha en lenguaje C.

Debido a sus "buenas cualidades como matemático", este programa ha revolucionado la metodología de la enseñanza de las matemáticas, puesto que se ha incorporado como parte fundamental y se han consolidado las clases prácticas de matemáticas en ordenador. La aparición del *Mathematica* en las aulas, aunque en mayor envergadura, podría asemejarse a la aparición de la calculadora, desplazando cada vez más los cálculos manuales por clases en el ordenador, pudiendo así modernizar la enseñanza de las matemáticas adaptándola también a la era de la informática.

Otra de sus ventajas es su portabilidad, es decir, *Mathematica* es un sistema capaz de ser utilizado en muchos ordenadores, desde un ordenador personal (Macintosh o PC) a un gran ordenador compartido por múltiples usuarios. Así, una de las dos partes fundamentales del programa, denominada **Kernel**, es común en todas las versiones, mientras que la otra parte, **Front End**, es específica de cada ordenador.

Finalmente, destacaremos otros manipuladores algebraicos como son, en orden de aparición en el mercado, Reduce, Macsyma, Maple, Mumath, Derive, Scratchpad, Axiom. Hay que añadir que ninguno de ellos supera a *Mathematica* en universalidad.

1.2. Utilidades del programa *Mathematica*

Mathematica alcanza casi todas las ramas de la matemática. Sin embargo, su uso puede ser diferente según la necesidad de cada usuario. Así, podríamos citar las cuatro siguientes, como las principales utilidades básicas de *Mathematica*:

1. Una calculadora tradicional de tipo numérico. La gran diferencia respecto a las calculadoras tradicionales es el número de funciones que *Mathematica* tiene implementadas (casi 800).

2. Un operador simbólico. *Mathematica* permite realizar operaciones matemáticas con expresiones no numéricas; es realmente potente, de hecho permite derivar e integrar funciones, resolver ecuaciones diferenciales, cálculo de límites o series de potencias, etc. y todo ello en forma simbólica.

3. Un potente paquete gráfico. *Mathematica* permite obtener gráficas en 2 y 3 dimensiones. Hay multitud de opciones en cada caso, desde el color hasta la perspectiva. También soporta animaciones. Además, los gráficos generados se pueden traducir automáticamente a formato Postscript permitiendo el intercambio con otros programas.

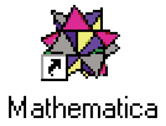
4. Un lenguaje de programación de alto nivel. *Mathematica* está escrito en lenguaje C, y la mayoría de las instrucciones para realizar programación son similares a las de dicho lenguaje. Permite el uso de bucles, recursiones así como la posibilidad de definir las propias funciones.

1.3. Empezamos a trabajar con *Mathematica*

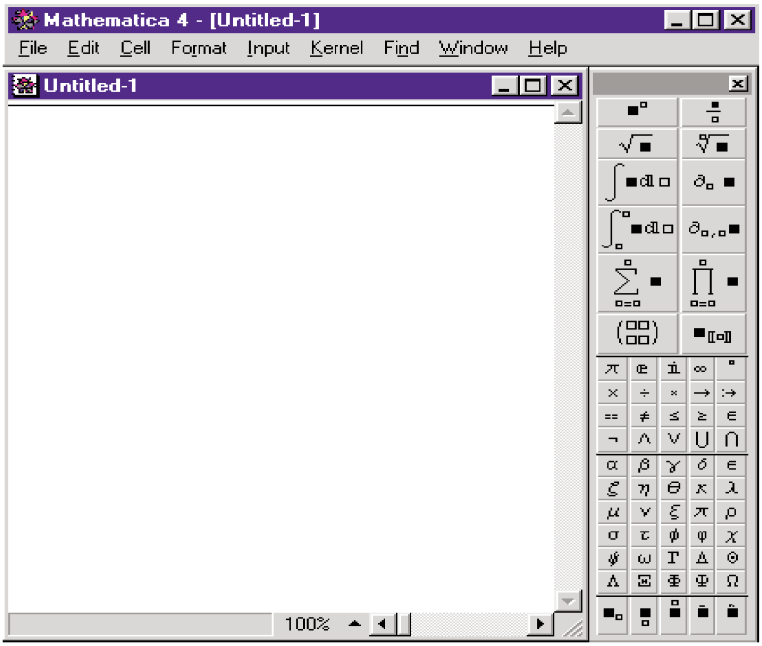
Como ya se ha mencionado, *Mathematica* es un sistema capaz de ser utilizado en muchos ordenadores, Macintosh, PC, o un ordenador compartido por múltiples usuarios que podría utilizar Unix. El **Kernel** es común en todos ellos; es la parte encargada de ejecutar todos los comandos así como de realizar los cálculos. En el **Kernel**, *Mathematica* tiene definidas una gran cantidad de órdenes y de funciones. Además, hay otras funciones y utilidades que no están en el **Kernel**, pero que vienen en **packages** (paquetes) adicionales que es posible cargar en todo momento y que veremos posteriormente. El **Front End**, es la parte encargada de la interfase con el usuario y será diferente según el ordenador en el que trabajemos. Vamos a suponer en este caso, no siendo muy distinto en los demás, que trabajamos con *Mathematica* en un sistema PC con Windows 98 o posterior.

1.3.1. Inicio de la sesión con *Mathematica*

En primer lugar abrimos la aplicación. Para ello basta con hacer un doble click con el ratón sobre el icono de *Mathematica* o buscar la opción correspondiente en el menú de Inicio **Inicio** \ **Programas**\ **Mathematica** \ **Mathematica** .



En este momento, aparecen tres ventanas en nuestra pantalla: el menú principal de la aplicación, que es la barra horizontal en la parte superior de la pantalla, una gran ventana blanca, que es el documento en el que escribiremos las órdenes de *Mathematica* que serán evaluadas por el **Kernel**, denominada **Notebook**, y una ventana en la derecha es una *paleta* de símbolos matemáticos, que podemos se utiliza para insertar texto formateado en nuestro documento.



Una vez en esta situación podemos comenzar a escribir las órdenes y a crear el fichero que posteriormente guardaremos.

1.3.2. Creación de un fichero en el Notebook

Una vez activada la pantalla del **Notebook** (simplemente haciendo click sobre la pantalla en blanco), podemos comenzar a escribir. El **Notebook** es un cuaderno de notas y se puede estructurar como un libro, con secciones, subsecciones, etc. Las unidades de los **notebooks** son las **celdas**, que se podrán agrupar unas con otras formando una estructura de árbol jerarquizada. Cada celda viene delimitada por un corchete que aparece en la parte derecha y que abarca la total amplitud de la celda. Esta estructura, la veremos con más detalle en el siguiente capítulo.

¿Cómo podemos calcular el valor de $15 \times 23 + 746$?

- ⊕ creamos una nueva celda, para ello es suficiente con hacer un clic en el fichero,
- ⊕ escribimos la expresión que queremos calcular 15*23+746,
- ⊕ pulsamos a la vez SHIFT+ENTER o la tecla INTRO del teclado numérico.

En este primer momento comienza a cargarse *Mathematica*, por lo que tardará un poco más. Mientras está ejecutando, en la barra horizontal superior del **Notebook** puede leerse "`Running.... untitled-1`", donde `untitled-1` es el nombre de nuestro fichero, que se lo pondremos al guardar la primera vez. Además, también se observa que el corchete que delimita la celda se rellena (generalmente de un color), lo que indica también que *Mathematica* está ejecutando la orden de dicha celda. Una vez finalizada la ejecución, en pantalla, podemos ver:

```
In[1]:=  15* 23 + 746

Out[1]=  1091
```

observar que, a la derecha, vemos dos celdas pequeñas que abarcan la entrada y la salida, y una celda mayor que abarca las anteriores.

Con este ejemplo, aunque muy simple, ya tenemos un fichero de *Mathematica*, que con la orden **Save** (desplegando **File** del menú) podemos guardar con el nombre que queramos.

1.3.3. Interrupción de una ejecución de *Mathematica*

A veces nos vemos en la necesidad de interrumpir un proceso, por ejemplo si se realiza un programa que entra en un bucle infinito o, porque el programa tarda demasiado en realizar la operación, etc. En este caso, tenemos la posibilidad de interrumpir la operación a través del menú de *Mathematica*: para ello en la opción **Action** seleccionaremos **Interrupt** o **Abort**. No debe preocuparnos el hecho de que tarde demasiado, a veces pasa un rato desde que elegimos **Interrupt** hasta que se finaliza la operación.

1.3.4. Cargar un paquete en una ejecución con *Mathematica*

Hay muchas funciones y utilidades que no están en el **Kernel** pero que sí que las tiene *Mathematica*, en este caso en **packages** que cargaremos cada vez que vayamos a hacer uso de ellas. Supongamos que queremos dibujar un conjunto de vectores en tres dimensiones (campo vectorial). Para este ejemplo, debemos cargar el paquete correspondiente a dicha función **PlotVectorField3D**[ ]. El paquete lo cargamos con la orden:

$$\ll \text{Graphics`PlotField3D`}$$

(no debemos esperar aquí un *Out[]*). Y, una vez cargado, podremos ejecutar la orden anterior.

Naturalmente, no debemos recordar en todo momento cual es el paquete que hay que cargar. Esta información nos la proporciona la ayuda (**Help**) del menú de *Mathematica*.

1.3.5. Fin de la sesión con *Mathematica*

Ya finalizado nuestro trabajo con *Mathematica*, para salir, en **File**, seleccionamos la opción **Exit** y, en este caso, si hemos guardado el fichero salimos automáticamente, o, en caso contrario, si no hemos guardado se nos pregunta si queremos guardar o no; si queremos guardar y no tiene el nombre se abrirá la ventana Windows donde escribiremos el nombre del fichero.

1.4. Características de *Mathematica*

Ya sabemos crear un fichero *Mathematica*. El ejemplo visto es realmente simple y de hecho, no incluye ninguna orden especial. En esta sección vamos a ver todas aquellas cuestiones que nos permitirán realizar una sesión completa con *Mathematica*.

1.4.1. Sintaxis en la escritura

Debemos tener cuidado y prestar especial atención a la escritura pues *Mathematica* sigue unas normas rigurosas. Entre éstas, debemos observar las siguientes:

- TODAS las funciones propias de *Mathematica* comienzan su escritura por Mayúscula. Ejemplos de funciones son **Sqrt**[ ], **Cos**[ ], **Exp**[ ],...

- TODAS las constantes propias de *Mathematica* comienzan su escritura por Mayúscula. Ejemplos de algunas constantes son **E**, **Pi**,...

- TODAS las órdenes propias de *Mathematica* comienzan su escritura por Mayúscula. Ejemplos de algunas órdenes son **Clear**[ ], **For**[ ],...

- *Mathematica* distingue entre caracteres en mayúscula y en minúscula. Es conveniente que las variables y funciones que se vayan definiendo, sean en minúscula, para distinguirlas de las propias definiciones de *Mathematica*.

- NO se puede dejar espacios en blanco dentro del nombre de una función o variable. Así, *Mathematica* utiliza la yuxtaposición de órdenes para formar otra, como por ejemplo: **DisplayTogether**[ ] (representar gráficos juntos).

- Un espacio en blanco entre dos variables se interpreta como su producto. Por lo tanto **x z** es el producto de la variable **x** por la variable **z**, mientras que **xz** representa una variable **xz**. Excepción: el producto de un número por una variable se puede representar sin espacio: **6z** es lo mismo que **6*z**.

- NO se puede dar a una variable el nombre de una función o de una constante propia de *Mathematica*.

- TODAS las variables o funciones que definamos deben empezar por una letra. Por ejemplo **px2** es una variable, mientras que **2px** se interpreta como el producto **2*px**.

1.4.2. Delimitadores

- Los PARÉNTESIS **( )** se utilizan en aritmética para indicar prioridad en el cálculo (que es el mismo significado que en Matemáticas). También se utilizan para incluir comentarios en la siguiente forma: **(* Un ejemplo *)**. El **Kernel** nunca evalúa una expresión entre **(* *)**.

- Los CORCHETES [ ] se utilizan para escribir los argumentos de todas las funciones y órdenes en *Mathematica* o de las funciones que defina el usuario.

- Las LLAVES **{ }** se utilizan en las listas de elementos, en las estructuras de tipo repetitivo en programación y también para dar opciones en algunas órdenes.

1.4.3. Información adicional o ayuda

Podemos obtener información de dos formas:
Cuando estamos en Input, escribiendo interrogante **?** obtenemos información:

In[4]:= **?Cos** (* nos devuelve el significado de la orden *)

`Cos[z] gives the cosine of z.`

Observemos que, aunque genera *Out[3]* no aparecerá en el Nootebook.

In[5]:= **?Cos*** (* nos devuelve todas las órdenes que empiezan por Cos *)

`Cos Cosh CoshIntegral CosIntegral`

In[6]:= **?*rt** (* nos devuelve todas las órdenes que terminan por rt *)

`Abort Apart CheckAbort ...`

In[7]:= **??Cos** (* da información más detallada *)

Cos[z] gives the cosine of z.

`Attributes[Cos] = {Listable, NumericFunction, Protected}`

También podemos obtener información con **Help**, en el menú de *Mathematica*. Automáticamente accedemos al manual de *Mathematica* y podemos, o bien escribir una orden, o bien buscar según la materia que nos interese, por ejemplo **Graphics and Sound** y de ahí seleccionar **2D Plots**: aparecerán las órdenes **Plot**, **ListPlot** y **ParametricPlot**.

Capítulo 2
Entorno de *Mathematica*

2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es hacer una breve descripción de las herramientas básicas que debemos conocer en el entorno de *Mathematica*. Para ello introduciremos los conceptos básicos de Fichero y Celda y describiremos brevemente algunos de los menús que aparecen en dicho entorno; además explicaremos aquellas opciones de estos menús que sean de habitual uso.

Los menús que aparecen en el entorno de *Mathematica* son muy similares a los que podemos encontrar en cualquier aplicación de Windows. De la misma forma que todas las aplicaciones de entorno Windows, *Mathematica* está basado en el uso de ventanas y barras de menús que se despliegan al hacer un clic sobre ellos. En estos menús se muestran todas las herramientas que *Mathematica* permite utilizar. Debemos recordar que las opciones que se muestran en los menús pueden:

- **aparecer en negro:** podemos acceder a ellas en este momento,
- **aparecer atenuadas en gris:** NO podemos acceder a ellas en este momento, pero sí en otros,
- **aparecer con puntos suspensivos . . . al final:** al elegir esta opción aparecerá un cuadro de dialogo con diferentes opciones,
- **aparecer con un ▶ en la parte derecha:** al pulsar esta opción se desplegará un nuevo menú.

2.2. Menú de *Mathematica*

Cuando abrimos la aplicación *Mathematica* aparece en la parte superior, la barra de títulos y un menú. Para acceder a cualquiera de los apartados del menú tenemos dos opciones:

1. hacer un clic con el botón izquierdo del ratón sobre el nombre de la opción deseada,
2. pulsar Alt + letra que aparece subrayada en la opción deseada,

al utilizar cualquiera de las dos opciones se desplegará un menú vertical en el que aparecen a su vez varias opciones.

2.3. Ficheros

Cuando utilizamos *Mathematica* creamos ficheros. Para cada fichero *Mathematica* crea una ventana. De la misma forma que en cualquier aplicación de entorno Windows, cuando estamos trabajando con *Mathematica* podemos tener varios ficheros abiertos, de ellos uno es el fichero seleccionado, que es aquél sobre el que estamos trabajando. Este fichero se diferencia del resto de ficheros que tenemos abiertos porque su barra de títulos aparece en Azul oscuro, mientras que en el resto de ficheros que tenemos abiertos la barra de títulos aparece en Gris. Para pasar de un fichero a otro, que tenemos abierto, es suficiente con hacer un clic con el botón izquierdo del ratón en cualquier parte de la ventana. Debemos tener cuidado con los ficheros abiertos en *Mathematica*, ya que cuando activemos una orden en uno de ellos, automáticamente queda activada en todos los demás.

Si deseamos realizar operaciones sobre ficheros debemos elegir la opción que aparece en la barra de menú inicial con el nombre **File**. Al hacerlo se desplegará un menú vertical que contiene varias opciones; de ellas detallamos las más habituales a continuación:

- **New:** (o utilizando el teclado Ctrl + N) esta es la opción que debemos pulsar si deseamos crear un fichero nuevo. Al hacerlo aparecerá en pantalla una nueva ventana vacía en la que podremos diseñar nuestro nuevo fichero.
- **Open. . . :** (o utilizando el teclado Ctrl + O) esta opción permite abrir un fichero creado anteriormente. Al pulsarla aparecerá en pantalla la ventana típica de Windows que nos permitirá buscar y/o encontrar el fichero que deseemos.
- **Close:** (o utilizando el teclado Ctrl + F4) esta opción nos permite cerrar la ventana que tenemos seleccionada en este momento. Si no hemos guardado los cambios realizados aparecerá un cuadro de diálogo en pantalla, que nos recordará si queremos guardar esta última versión.
- **Save:** (o utilizando el teclado Ctrl + S) esta opción nos permite guardar el fichero. Si es la primera vez que lo guardamos al pulsar la opción aparece un cuadro de diálogo

(similar al que aparece cuando utilizamos la orden de abrir), donde debemos elegir el lugar en el que vamos a guardar nuestro fichero, así como el nombre que deseamos darle.

- **Save As. . . :** (o utilizando el teclado Shift + Ctrl + S) esta opción nos permite guardar un fichero YA CREADO en otro lugar o con un nombre distinto.

- **Save as Special:** al final de esta opción del menú, así como de algunas otras que indicaremos posteriormente, aparece el símbolo ► que nos indica que asociado a esta opción tenemos un menú lateral que contiene todas las características de los estilos de celdas en *Mathematica*. Nos permite salvar nuestro fichero con otro tipo de formato, por ejemplo con formato .tex para utilizar nuestro nuevo fichero en Latex o con formato .html que nos permite utilizar este fichero como una página Web.

- **Palettes:** al final de esta opción del menú también aparece el símbolo ►. Si pulsamos cualquiera de las opciones que ofrece este nuevo menú aparece en pantalla la paleta correspondiente. Utilizando estas paletas conseguimos simplificar nuestras órdenes para introducir las instrucciones que queremos ejecutar, así como mejorar la presentación en pantalla. Estas paletas las iremos describiendo a medida que las vayamos utilizando.

- **Notebooks:** al final de esta opción del menú también aparece el símbolo ►. En el nuevo menú que se genera aparecen los nombres de los últimos ficheros con los que hemos trabajado, si pulsamos en el nombre de cualquiera de ellos, éste se abrirá automáticamente.

- **Print:** (o utilizando el teclado Ctrl + P) esta opción nos permite imprimir el fichero que tenemos seleccionado en este momento.

- **Print Selection:** (o utilizando el teclado Shift + Ctrl + P) esta opción nos permite imprimir únicamente aquellas celdas que tengamos seleccionadas en este momento.

- **Exit:** esta opción nos permite abandonar *Mathematica*.

El resto de las opciones que aparecen en este menú las veremos más adelante, ya que son opciones más específicas que aprenderemos a utilizar a medida que las vayamos necesitando.

2.4. Celdas

Cuando trabajamos con *Mathematica* utilizamos celdas de contenido. En cada una de las celdas vamos colocando las instrucciones que queramos que se ejecuten en cada momento. Las celdas en *Mathematica* quedan definidas por un símbolo] que aparece a la derecha de la ventana de nuestro fichero. Este símbolo agrupa el contenido de cada una de las celdas. Una celda puede tener varias líneas de datos. Para crear una nueva línea simplemente pulsamos Intro.

Para seleccionar una celda nos colocamos en la parte derecha de la celda, en el] y cuando el cursor cambia de forma pulsamos el botón izquierdo del ratón; al hacerlo el] aparece marcado en negro, lo que nos indica que la celda está seleccionada. Si deseamos seleccionar varias celdas tenemos diferentes posibilidades:

- *para seleccionar varias celdas que se encuentren consecutivas* nos colocamos encima de la primera de ellas, cuando el cursor cambia de forma pulsamos el botón izquierdo del ratón y vamos moviéndolo hasta completar el grupo de celdas que deseamos seleccionar,

- *para seleccionar varias celdas cualesquiera que sea su posición* seleccionamos la primera de ellas, pulsamos el botón de Ctrl y, manteniéndolo pulsado, vamos seleccionando el resto de las celdas que nos interesen.

2.4.1. Entrada y salida

En *Mathematica* debemos distinguir fundamentalmente tres tipos de celdas: celdas de entrada de datos, celdas de salida de resultados y celdas que contienen diferentes tipos de texto.

- **Input o celdas de entrada de datos:** son aquellas celdas en las que colocamos las instrucciones que queremos que se ejecuten. Para ejecutar la acción tenemos dos opciones: pulsamos, estando sobre la celda, conjuntamente las teclas SHIFT y ENTER o pulsamos la tecla INTRO que se encuentra en la zona de teclado numérico.

- **Output o celdas de salida de datos:** son aquellas celdas en las que *Mathematica* coloca el resultado de la acción que acaba de ejecutar. El contenido de estas celdas aparece sin negrita. Cuando ejecutamos una acción en *Mathematica* podemos observar como aparece, debajo de la celda de Input, la celda de Output, esta celda aparece unida a la de Input mediante un].

Para crear una celda nueva es suficiente con posicionar el ratón donde queramos colocar la nueva celda, éste es el momento de pulsar un clic con el botón izquierdo del ratón, al hacerlo aparece una línea de separación de ventana, si escribimos a continuación aparece una nueva celda. Si queremos modificar en *Mathematica* la estructura de las celdas de trabajo debemos utilizar la opción **Cell** del menú de *Mathematica*. Las opciones que aquí aparecen las describiremos a medida que las vayamos necesitando.

E 2.4.1 **Calcula con *Mathematica* el resultado de la operación $26 + 12$.**

- Crea una celda nueva, para ello es suficiente con que hagas un clic con el ratón.
- Escribe la expresión que deseas calcular.
- Pulsa las teclas Shift+Enter ó la tecla Intro del teclado numérico.

E 2.4.2 **Calcula $\sqrt{32}$.**

- Posibilidad 1: en una nueva celda escribe la orden **Sqrt[32]** y ejecuta la acción.
- Posibilidad 2: en una nueva celda escribe la orden **32^(1/2)** y ejecuta la acción.
- Posibilidad 3: utilizar la paleta que aparece en la parte derecha de la pantalla.

E 2.4.3 **Calcula 15×73.**

- Posibilidad 1: en una nueva celda escribe la orden **15 73** y ejecuta la acción.
- Posibilidad 2: en una nueva celda escribe la orden **15*73** y ejecuta la acción.

E 2.4.4 **Calcula en forma decimal $\frac{5}{18}$.**

- Posibilidad 1: en una nueva celda escribe la orden **5/18//N** y ejecuta la acción.
- Posibilidad 2: en una nueva celda escribe la orden **N[5/18]** y ejecuta la acción.
  Nota: comprueba que sucede escribiendo únicamente 5/18 y ejecutando la acción.

E 2.4.5 **Calcula en forma decimal $\frac{9}{15} + 2\sqrt{8} + 4{,}7 \times 12$.**

2.5. Edición

Si deseamos realizar operaciones de cortar, copiar,... sobre texto o sobre celdas completas debemos elegir la opción que aparece en la barra de menú inicial con el nombre **Edit**. Al hacerlo se despliega un menú vertical, similar al anterior, que contiene varias opciones; de ellas detallamos las más habituales a continuación:

- **Undo:** (o utilizando el teclado Ctrl + Z) esta opción nos permite deshacer el último cambio que hayamos realizado.
- **Cut:** (o utilizando el teclado Ctrl + X) esta opción nos permite cortar aquello que tengamos seleccionado.
- **Copy:** (o utilizando el teclado Ctrl + C) esta opción nos permite copiar aquello que tengamos seleccionado.
- **Paste:** (o utilizando el teclado Ctrl + V) esta opción nos permite pegar algo que habíamos copiado previamente en el lugar que le estemos marcando en este momento.
- **Clear:** (o utilizando el teclado Supr) esta opción nos permite borrar aquello que tengamos seleccionado.
- **Save Selection as:** al final de esta opción del menú también aparece el símbolo ►. Esta opción nos permite salvar la celda o celdas que tengamos seleccionadas con otros formatos por ejemplo .bmp, .rtf o .eps.
- **Select All:** (o utilizando el teclado Ctrl + A) esta opción nos permite seleccionar todo el contenido de nuestro fichero.

El resto de las opciones que aparecen en este menú las veremos más adelante, ya que son opciones más especificas que aprenderemos a utilizar a medida que las vayamos necesitando.

2.6. Formatos

Si deseamos realizar operaciones de formato sobre texto o sobre celdas debemos elegir la opción que aparece en la barra de menú inicial con el nombre **Format**. Al hacerlo se despliega un menú vertical, similar a los anteriores, que contiene varias opciones; de ellas detallamos las más habituales a continuación:

- **Style:** al final de esta opción aparece el símbolo ►. Esta opción nos permite dar diferentes estilos a una o a varias celdas que debemos seleccionar previamente. Algunas de las opciones que aparecen son:
  - **Title:** (o utilizando el teclado Alt + 1) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de un título.

- **Subtitle:** (o utilizando el teclado Alt + 2) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de un subtítulo.
- **Subsubtitle:** (o utilizando el teclado Alt + 3) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de un subsubtítulo.
- **Section:** (o utilizando el teclado Alt + 4) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de una sección.
- **Subsection:** (o utilizando el teclado Alt + 5) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de una subsección.
- **Subsubsection:** (o utilizando el teclado Alt + 6) nos permite dar a nuestra celda el aspecto de una subsubsección.
- **Text:** (o utilizando el teclado Alt + 7) esta opción la utilizamos cuando queremos que nuestra celda contenga sólo texto.
- **Small Text:** (o utilizando el teclado Alt + 8) esta opción la utilizamos cuando queremos que nuestra celda contenga sólo texto, pero de menor tamaño que el anterior.
- **Input:** (o utilizando el teclado Alt + 9) esta opción la utilizamos cuando queremos que nuestra celda sea una celda de ejecución de *Mathematica*, es la opción que aparece por defecto.
- **Output:** esta opción la utilizamos cuando queremos que nuestra celda sea una celda de salida de datos en *Mathematica*, esta opción aparece automáticamente cuando ejecutamos una celda de tipo Input que tenga salida de datos.

▪ **Font:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega en esta opción encontramos todos los tipos de letras con los que permite trabajar *Mathematica*, por defecto aparece marcada la opción *Courier New*. Cuando queremos dar formato podemos darlo a la celda completa (seleccionando la celda previamente), a un texto previamente seleccionado o al texto que vayamos a escribir posteriormente.

▪ **Face:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega en esta opción encontramos los diferentes estilos que nos permite dar *Mathematica* a las letras, para utilizarlos procedemos de forma similar al apartado anterior. Las posibilidades que aparecen son:

- **Plain:** es el estilo de letra habitual.

  - **Bold:** (o utilizando el teclado Ctrl + B) es el estilo **negrita**. Es el que aparece por defecto en *Mathematica*.
  - **Italic:** (o utilizando el teclado Ctrl + I) es el estilo *itálica*.
  - **Underline:** es el estilo subrayado.

- **Size:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega en esta opción encontramos los diferentes tamaños que nos permite dar *Mathematica* a las letras, para utilizarlos procedemos de forma similar a los apartados anteriores.

- **Text Color:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega en esta opción encontramos los diferentes colores que nos permite dar *Mathematica* a las letras, para utilizarlos procedemos de forma similar a los apartados anteriores.

- **Text Alignment:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega encontramos las diferentes alineaciones que nos permite dar *Mathematica* a los contenidos de las celdas (alineación a izquierda, a izquierda un 25 % a derecha, a derecha un 75 %, centrada), para utilizarlos procedemos de forma similar a los apartados anteriores.

- **Show Ruler:** al pulsar esta opción la ventana de trabajo cambia, apareciendo en ella una regla en la parte superior que nos permitirá mejorar la presentación de nuestro trabajo.

- **Show Toolbar:** al pulsar esta opción la ventana de trabajo cambia, apareciendo en la parte superior una barra de menú que nos permite modificar el estilo de nuestra celda, guardar el fichero, imprimir su contenido, consultar las diferentes características de nuestro fichero o modificar la alineación de nuestra celda.

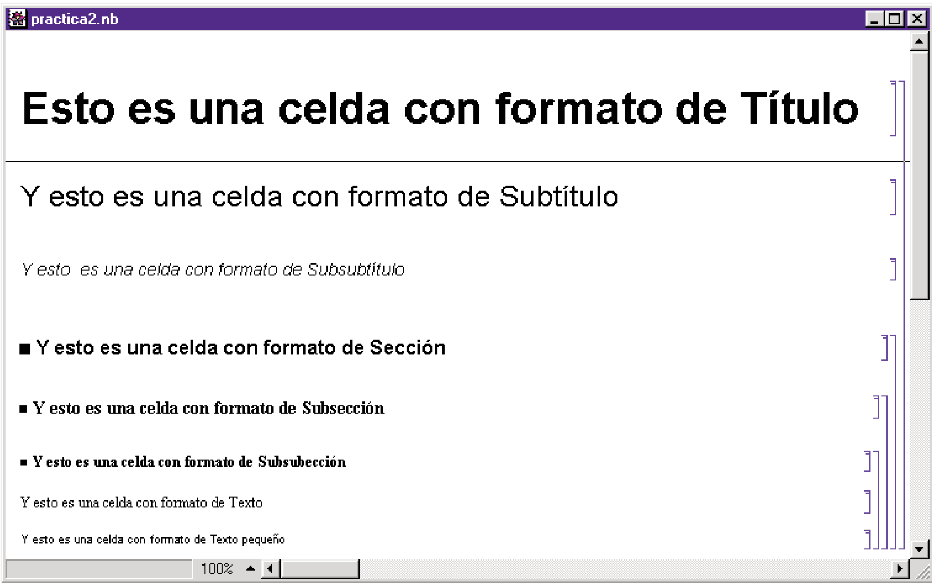
- **Show Page Breaks:** al pulsar esta opción aparecen en pantalla los saltos de página de nuestro fichero, estos quedan marcados mediante una línea de $-$.

- **Magnification:** al final de esta opción también aparece el símbolo ▶. En el menú que se despliega en esta opción encontramos las diferentes vistas que nos permite dar *Mathematica* a nuestro fichero. Por defecto aparece con un tamaño de 100 %.

E 2.6.1 **Crea un fichero cuyo contenido sea similar al que aparece a continuación:**

Nota: Observa que las celdas se van agrupando automáticamente a medida que decides los estilos de cada una de ellas, es lo que se llama Jerarquía de celdas.

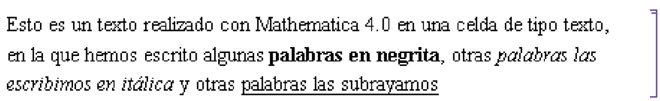
Mathematica permite ocultar celdas que se encuentran en una jerarquía inferior por la de jerarquía superior. Para ocultarlas seleccionamos el] del grupo y pulsamos un doble clic con el botón izquierdo del ratón. Al hacerlo el] cambia de forma y aparece otro] que nos indica que tenemos algo oculto. Para volver a mostrarlo realizamos el mismo proceso.



E 2.6.2 **Oculta las celdas que están en una jerarquía inferior de la subsección.**

E 2.6.3 **Suprime la celda en la que aparece** Esto es un texto.

E 2.6.4 **Copia en una celda de tipo texto el siguiente párrafo, marcando las partes que aparecen en negrita, itálica,. . .**



E 2.6.5 **Escribe diferentes textos en diferentes celdas y haz cambios en la alineación, color, tamaño del texto, . . .**

2.7. Jerarquías

Las celdas en *Mathematica* se organizan siguiendo una estructura de jerarquías. Las jerarquías vienen marcadas por un] más o menos grande que empieza en la celda de jerarquía superior y que va incluyendo a todas las celdas relacionadas con ella. El orden de jerarquía es el que se indica en la sección 2.6 es decir: Title, Subtitle, Subsubtitle, Section, Subsection, Subsubsection, al mismo nivel de jerarquía se encuentran Text, Small Text, Input y a nivel inferior de Input se encuentra Output.

Mathematica permite ocultar celdas que se encuentran en una jerarquía inferior por la de jerarquía superior. Para ocultarlas seleccionamos el] del grupo y pulsamos un doble clic con el botón izquierdo del ratón. Al hacerlo el] cambia de forma y aparece otro] que nos indica que tenemos algo oculto. Para volver a mostrarlo realizamos el mismo proceso.

2.8. Kernel

Es la base de *Mathematica*, el Núcleo, es lo que permite que *Mathematica* funcione. Cuando ejecutamos cualquier instrucción en *Mathematica*, el Kernel entra en funcionamiento automáticamente.

De las posibilidades que ofrece el menú Kernel tan sólo vamos a ver tres de ellas:

- **Interrupt Evaluation . . . :** (o utilizando el teclado Alt + ,) esta opción nos permite interrumpir momentaneamente el proceso del Kernel.

- **Abort Evaluation:** (o utilizando el teclado Alt + .) esta opción nos permite interrumpir definitivamente la acción que está ejecutando el Kernel en este momento.

- **Quit Kernel:** esta opción nos permite terminar definitivamente el funcionamiento del Kernel, de forma que se terminarán todos los procesos que tengamos y todas las variables quedan sin inicializar.

2.9. Windows

Si queremos modificar el aspecto de nuestra pantalla cuando contiene diversas ventanas debemos utilizar la opción **Windows** del menú. En este menú se nos presentan, entre otras, las siguientes opciones:

- **Stack Windows:** esta opción hace que todas las ventanas que aparezcan en pantalla recuperen su tamaño normal.

- **Tile Windows Wide:** esta opción nos permite ver en pantalla el contenido de todas las ventanas, ya que éstas cambian de forma ocupando toda la pantalla en horizontal.
- **Tile Windows Tall:** esta opción también nos permite ver en pantalla el contenido de todas las ventanas que tengamos abiertas, ya que pasan a ocupar toda la pantalla, pero en este caso en vertical.

2.10. Help

Mathematica tiene un menú que nos va a ayudar a solucionar todos aquellos problemas que podamos encontrarnos en nuestro trabajo, es la opción **Help**. Si en este menú elegimos la opción **Help Browser** (o utilizando el teclado Shift + F1) aparece en pantalla una ventana que contiene la ayuda de *Mathematica*. Podemos utilizarla de forma estructurada, siguiendo el orden de las ventanas que aparecen de izquierda a derecha. Si conocemos alguna palabra relacionada con nuestro problema es suficiente con escribirla en la parte superior y pulsar Intro.

Capítulo 3
Cálculo Básico

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es describir las opciones básicas de *Mathematica* con el fin de que nos familiaricemos con su entorno y aprendamos las bases de su utilización. En cada una de las secciones incluiremos ejemplos que nos faciliten la asimilación de los conceptos introducidos.

3.2. Operaciones elementales

Siempre que nos planteemos el estudio de una nueva materia debemos hacerlo por los conceptos básicos. En este caso cuando empezamos a manejar la aplicación *Mathematica* 4.1 debemos tener en cuenta que nos va a permitir resolver todo tipo de problemas matemáticos, por este motivo nuestros primeros pasos en la utilización de la aplicación se deben centrar en el manejo de situaciones matemáticas básicas. Podemos pensar en utilizar *Mathematica* como una calculadora, pero debemos tener claro que la potencia de cálculo de esta aplicación es realmente importante y que con ella podremos realizar operaciones que serían imposibles con cualquier calculadora de bolsillo. Es decir, con *Mathematica* podemos realizar no sólo todas las operaciones que realizaríamos con una calculadora de bolsillo, con una precisión mucho mayor, sino que además nos va a permitir trabajar con opciones de gráficos o de programación de gran precisión.

3.2.1. Tipos de Números

En primer lugar nos vamos a centrar en los tipos de números que *Mathematica* puede utilizar y en como reconocerlos. Los tipos de números que *Mathematica* reconoce son:

- **Integer**: son los números enteros.

- **Rational**: son los números racionales que se construyen como el cociente de números enteros. *Mathematica* da el resultado simplificado al máximo.

  In[1]:= 12454/1452

  Out[1]= $\frac{6227}{726}$

- **Real**: son los números reales. Los podemos obtener con diferentes órdenes de precisión. Se distinguen de los enteros porque al final aparece un punto, así:

  - 245 es un número entero.
  - 245. es un número real aproximado.
  - 245,0000000000 es un número real aproximado con un cierto grado de precisión.

- **Complex**: son los números complejos que se construyen en la forma $a+b\,I$. Existen algunas funciones en *Mathematica* con las que se simplifica el trabajo con números complejos. Así, si $z = a + b\,I$ es un número complejo:

  - **I** representa la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, no es una función sino una constante.
  - **Re**[**z**] representa la parte real de z, en este caso a.
  - **Im**[**z**] representa la parte imaginaria de z, en este caso b.
  - **Conjugate**[**z**] calcula el conjugado de z, en este caso $z^* = a - b\,I$.
  - **Abs**[**z**] calcula el valor absoluto de z, en este caso $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  - **Arg**[**z**] calcula el argumento ϕ de z siendo $z = |z|\,e^{i\phi}$.

Si en algún momento tenemos dudas sobre el tipo de un número *Mathematica* nos permite la opción de conocer la cabecera del número, es decir, su tipo. La opción es **Head**[**número**]. Por ejemplo:

In[2]:= **Head**[**123**]
Out[2]= Integer

In[3]:= **Head**[**123.**]
Out[3]= Real

3.2.2. Operadores Aritméticos

Ahora que ya conocemos los tipos de números con los que *Mathematica* puede trabajar vamos a ver como se escriben los operadores básicos:

- $+$ es el operador para la suma. P. ej: $2+3$.
- $-$ es el operador para la resta. P. ej: $2-3$.
- $*$ es el operador para la multiplicación. P. ej: $2*3$. Pero *Mathematica* también nos permite escribir la multilicación de forma más sencilla, simplemente separando los números por un espacio en blanco. P. ej: 2 3.
- / es el operador para la división. P. ej: 2/3.
- ^ es el operador para la potencia. P. ej: 2^3. En ocasiones *Mathematica* nos puede devolver un resultado en notación científica.

  In[4]:= **1.8^34**

  Out[4]= $4{,}77821 \times 10^{8}$

  Otras veces tal vez nos interese a nosotros introducir una expresión matemática utilizando notación científica, para ello tenemos dos posibilidades:

  In[5]:= **1.7 10^34**

  Out[5]= $1{,}7 \times 10^{34}$

  In[6]:= **1.7 *^34**

  Out[6]= $1{,}7 \times 10^{34}$

  Recordar que en la paleta **BasicImput** aparece una orden que nos permite escribir las potencias de manera sencilla y mucho más elegante.

3.2.3. Jerarquía de operadores

Los operadores siguen en *Mathematica* las reglas matemáticas estándar de agrupamiento, por este motivo, y con el fin de evitarnos problemas, siempre que deseemos hacer operaciones matemáticas es recomendable que indiquemos el orden en el que queramos que *Mathematica* las realice mediante la utilización de paréntesis.

In[7]:= **2^4 + 1**
Out[7]= 17

In[8]:= **2^(4 + 1)**
Out[8]= 32

3.2.4. Resultados exactos y aproximados

Mathematica permite obtener resultados exactos incluso en casos en los que los números con los que estamos trabajando tengan un elevado número de cifras. P. ej: es capaz de calcular 2^{100} que es un número con 31 dígitos.

In[9]:= **2^100**

Out[9]= 1267650600228229401496703205376

Tal vez lo que nos interese no sea el número exactamente, sino una aproximación numérica suya. En ese caso *Mathematica* nos permite dos opciones:

In[10]:= **2^100 //N**

Out[10]= $1.26765\ 10^{30}$

In[11]:= **N[2^100]**

Out[11]= $1.26765\ 10^{30}$

La orden **N**[*expr*] ó *expr*//**N** nos permite calcular aproximaciones numéricas de una expresión, e incluso nos permite decidir el orden de precisión que deseamos obtener mediante **N**[*expr*,*decimales*].

In[12]:= **N[20/6,4]**

Out[12]= 33.3333

3.2.5. Algunas operaciones con números enteros

Dentro de las operaciones que podemos realizar con *Mathematica* para números enteros vamos a resaltar dos que nos pueden ser especialmente útiles:

- **GCD**[n_1, n_2,...] calcula el máximo común divisor de los enteros n_1, n_2,...

  In[13]:= **GCD[72, 36, 45]**

  Out[13]= 9

- **LCM**[n_1, n_2,...] calcula el mínimo común múltiplo de los enteros n_1, n_2,...

  In[14]:= **LCM[72, 36, 45]**

  Out[14]= 360

E 3.1.1 **Calcula la parte real, imaginaria, conjugado y valor absoluto del número complejo que se obtiene mediante la suma de los números $8+3\,I$ y $5-6\,I$.**

E 3.1.2 **Calcula**

$$4+\frac{3}{5}(2+3^2)^3, \qquad \frac{|1+i|^2+|1-i|^2}{2}, \qquad e^{i\pi}+1.$$

E 3.1.3 **Determina si** 18 **y** 1715 **son primos entre sí o no.**

E 3.1.4 **Determina si** 250 **y** 605 **son primos entre sí o no.**

E 3.1.5 **Determina el número más pequeño que es divisible a la vez por** 125 **y** 42**.**

3.3. Funciones y constantes básicas de *Mathematica*

Mathematica posee una gran colección de funciones matemáticas, prácticamente todas las funciones que existen en Matemáticas las podemos encontrar aquí implementadas. De ellas tan solo vamos a destacar aquellas de uso más común:

- **Sqrt**[**x**] calcula $\sqrt{x}$. Esta orden aparece en la paleta **BasicInput**. Junto a ella encontramos la orden $\sqrt[n]{x}$; si deseamos escribir esta orden en modo línea debemos hacerlo en la forma $x^{1/n}$.
- **Exp**[**x**] calcula e^x.
- **Log**[**x**] calcula $\log_e x$.
- **Log**[**b,x**] calcula $\log_b x$.
- **Sin**[**x**]**, Cos**[**x**]**, Tan**[**x**] calculan las correspondientes funciones trigonométricas; los argumentos de esta funciones vienen dados, sino indicamos lo contrario, en radianes.
- **ArcSin**[**x**]**, ArcCos**[**x**]**, ArcTan**[**x**] calculan las correspondientes inversas de las funciones trigonométricas.
- **n!** calcula el factorial de un número n, es decir, $n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$.
- **Max**[**x,y,...**]**, Min**[**x,y,...**] calcula el máximo (o el mínimo) de x,y,...

Mathematica también tiene implementadas algunas constantes que nos serán especialmente útiles. Estas constantes aparecen en la paleta **BasicInput**; su utilización a partir de la paleta permite obtener ficheros de lectura mucho más sencilla.

- **Pi** que representa $\pi = 3{,}14159$.
- **E** que representa $e = 2{,}71828$. Debemos tener mucho cuidado a la hora de utilizar la exponencial, ya que podemos confundir la e del teclado con la e que aparece en la paleta **BasicInput**. Si deseamos escribir la constante que utiliza *Mathematica* debemos recordar que todas las órdenes propias de *Mathematica* empiezan siempre por mayúscula.

- **Infinity** que representa ∞.
- **Degree** que representa grados. Normalmente su output es de la forma ^{o}.

E 3.2.1 **Determina con una sola operación si $e^\pi > \pi^e$ o $e^\pi < \pi^e$.**

E 3.2.2 **Calcula** $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})$, $\cos(\pi)$, $\tan(\frac{\pi}{2})$. **¿Qué sucede cuando realizas esta última operación?**

E 3.2.3 **Comprueba mediante varios ejemplos que:**

- $\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$.
- $\log(a^b) = b\log(a)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\,\cos(b) + \cos(a)\,\sin(b)$.
- $\cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b)$.

3.4. Definición de variables

Acabamos de ver que *Mathematica* tiene implementadas algunas constantes básicas que son de uno común. La finalidad que tiene la definición de estas constantes es facilitar la comprensión de las expresiones que aparecen en nuestro fichero. *Mathematica* nos permite, de la misma forma que cualquier lenguaje de programación, asignar valores a variables, con lo que se consigue que las expresiones que definamos sean fácilmente entendibles y mucho más útiles.

In[15]:= **x=5**

Out[15]= 5

Esta asignación nos asegura que, a partir de este momento y mientras dure la ejecución de la sesión de *Mathematica*[1], la variable **x** va a tener asignado el valor **5**, de forma que cuando aparezca una **x** *Mathematica* reemplazará esta variable por **5**.

In[16]:= **x^2**

Out[16]= 25

En cualquier momento podemos volver a reasignar el valor de la variable **x**.

In[17]:= **x=32**

Out[17]= 32

[1]Cuando cerramos un fichero las variables que hemos asignado siguen estando en memoria, hasta que no terminamos la sesión de trabajo o salimos del Kernel éstas no desaparecen de la memoria.

También podemos asignar a variables el resultado de una operación.

In[18]:= **y=x + 14**

Out[18]= 46

Cuando realizamos la asignación a una variable del resultado de una operación como en el caso anterior debemos distinguir perfectamente si hemos realizado la operación anterior o si la asignación la realizamos con la orden

In[19]:= **y:=x + 14**

Out[19]= 46

Si utilizamos el operador = la expresión toma el valor al dar su defincíón, sin embargo si utilizamos el operador := la expresión toma el valor cuando se usa, esto es, una *regla de transformación*. Veamos la diferencia con dos sencillos ejemplos:

In[19]:= **a = 3;**
b = 7;
x = a;
y := b;
{x, y}

Out[23]:= {3,7}

In[24]:= **a = 2;**
b = 4;
{x, y}

Out[26]:= {3,4}

Cuando utilizamos variables debemos tener cuidado con su utilización. Usarlas es fácil y cómodo, tan solo debemos tener en cuenta que:

- Los nombres de las variables pueden contener letras y números, pero siempre deben empezar por una letra.
- No podemos utilizar blancos en los nombres de las variables, ya que si dejamos uno o varios espacios en blanco entre las variables **x** e **y**, *Mathematica* entiende que la operación que estamos realizando con las dos variables es la multiplicación, por lo tanto en este caso el resultado que obtenemos es

  In[27]:= **x y**

  Out[27]= 1472
- Así que cuidado con los blancos ya que, en el caso en el que nos encontramos, si no dejamos un espacio entre las variables **x** e **y**, *Mathematica* entiende que estamos tratando con una nueva variable.

  In[28]:= **xy**

  Out[28]= xy

- Al hacer la multiplicación de un número por una variable, si colocamos el número delante, *Mathematica* entiende que estamos multiplicando (aunque no dejemos un espacio en blanco entre ellos).

  In[29]:= **5x**

  Out[29]= 160

  Sin embargo, si colocamos el número después de la variable el resultado que obtendremos será diferente según dejemos un espacio en blanco o no.

  In[30]:= **x 5**

  Out[30]= 160

  In[31]:= **x5**

  Out[31]= x5

  Si queremos liberar el valor de la variable antes de que termine nuestra sesión de trabajo tenemos dos posibilidades:

  In[32]:= **Clear**[**x**]

  In[33]:= **y=.**

  Podemos observar que en ninguno de los dos casos se produce un *Output*.

- Existen algunas letras mayúsculas que no pueden utilizarse para definir variables, ya que *Mathematica* las usa para órdenes específicas. Por ejemplo: **C** que es una constante de integración para las ecuaciones diferenciales, **D** que se utiliza para derivar, **E** que se refiere a la exponencial, **I** que se refiere a la unidad imaginaria, **N** que se utiliza para obtener valores reales y **O** que se refiere al orden de una expresión.

Si no queremos utilizar celdas nuevas cada vez que definimos variables podemos utilizar el símbolo **;**. Este símbolo es un delimitador de sentencias, indica a *Mathematica* que hemos terminado de escribir una instrucción. La utilización del **;** nos va a permitir:

- Poder escribir varias sentencias en una misma celda.

  In[34]:= **x=5;**

  y=7;

  x y

  Out[36]= 35

- Evitar que aparezca la celda de *Output*, cuando esta no ofrece ningún resultado nuevo.

  In[37]:= **x=45;**

E 3.3.1 **Define en** *Mathematica* $a = 2$ **y** $b = 3$**. Determina, SIN USAR** *Mathematica***, cual es el resultado de las operaciones siguientes:** $a + b$, $a\,3$, $a3$, $a * b$, ab, $a\,b$**. Comprueba el resultado.**

E 3.3.2 **Si, a continuación, y sin borrar el contenido de las variables determinadas en el ejercicio anterior, define** $b = 18$**. Determina el resultado de las operaciones** ab **y** $a * b$**.**

E 3.3.3 **Cierra el fichero que tienes abierto (sin salir de la aplicación). Crea uno nuevo y calcula el resultado de las operaciones** $18c$ **y** $18a$**. ¿Qué sucede?**

E 3.3.4 **Termina la ejecución de la sesión del Kernel (sin salir de la aplicación), es decir pulsa Kernel \ Quit Kernel \ Local. Calcula el resultado de las operaciones** $18\,c$ **y** $18\,a$**. ¿Qué sucede?**

E 3.3.5 **Vuelve a asignar a** a **y** b **los valores** 2 **y** 3 **respectivamente, no es necesario que los vuelvas a escribir, guarda los cambios realizados en el fichero y cierra la aplicación** *Mathematica***. Vuelve a abrir el fichero que has guardado en el ejercicio anterior, y sin asignar de nuevo los valores a** a **y** b**, calcula el resultado de las operaciones** $18\,c$ **y** $18\,a$**. ¿Qué sucede?**

3.5. Funciones de una variable

3.5.1. Definición

Una función real de una variable real podemos expresarla de forma sencilla en matemáticas mediante una expresión de la forma

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & f(x) \end{array}$$

donde a $f(x)$ le podemos asignar diferentes expresiones, como por ejemplo $f(x) = x^2$. De esta forma $f(5)$ tendrá el valor 25.

Para definir funciones en *Mathematica* debemos ejecutar una sencilla instrucción:

In[38]:= **f[x_]:=x^2**

Esta instrucción no tiene salida, es decir, no genera un *Output* aunque no vaya terminada en un **;** . Vamos a ver que significan cada uno de los símbolos que aparecen en la instrucción anterior:

- **f** es el nombre de nuestra función.
- [ ] indican que lo que aparece dentro de ellos es el argumento de nuestra función.
- **x_** indica que el argumento de nuestra función va a ser identificado por **x** en la expresión posterior.
- **:=** este operador es el que nos permite realizar la asignación. Es decir, nuestra función va a tomar como valor la expresión que aparece en la parte derecha.[1]
- **x^2** indica que la función que vamos a definir es x^2. En esta parte NO debe aparecer el símbolo _ .

3.5.2. Como utilizar las funciones

Para utilizar las funciones que hemos definido previamente es suficiente con sustituir la variable que aparece entre corchetes por el valor que nos interese en este momento.

In[39]:= **f[4]**
Out[39]= 16

In[40]:= **f[y]**
Out[40]= y^2

Una vez que hemos definido una función, ésta va a mantenerse en memoria hasta que terminemos nuestra sesión de trabajo. Si en cualquier momento deseamos saber como está definida una función sólo tenemos que preguntar por ella, mediante una instrucción que ya vimos en la sección 1.4.3:

In[41]:= **?f**

```
Global `f
```

$f[x\_] := x^2$

En el caso en el que queramos eliminarla de memoria antes de terminar la sesión, tenemos que ejecutar la instrucción

In[42]:= **Clear[f]**

Esta instrucción no produce salida. En el caso de funciones no se puede utilizar la orden **f=.** para borrar su contenido. Si deseamos borrar el contenido de una función utilizando la orden **=.** debemos hacerlo en la forma:

In[43]:= **f[x_]=.**

[1] NO es lo mismo colocar solamente el símbolo =, aunque en apariencia pueda parecerlo, la diferencia es muy sutil y no vamos a entrar a detallarla.

3.5.3. La importancia de definir adecuadamente las funciones

Cuando definimos una función debemos definirla siempre utilizando el símbolo _ para indicar en la parte izquierda de la función quien es la variable. Veamos con un sencillo ejemplo que es lo que sucede si no escribimos este símbolo.

In[44]:= **f[x_]=**x^2

In[45]:= **f2[x]=**x^2

In[46]:= **{f[x], f[r], f[3], f2[x], f2[r], f2[3]}**

Out[46]= {9, r^2, 9, 9, f2[r], f2[3]}

Es decir, sino indicamos el _ *Mathematica* no entiende que **x** sea una variable.

3.5.4. Operaciones con funciones de una variable

Las operaciones con funciones de una variable son realmente sencillas. Éstas se ejecutan de la misma forma (y utilizando los mismos operadores) que si estuviéramos trabajando con números o variables.

In[47]:= **f[x_]:=x^3**

In[48]:= **g[x_]:=x + 2**

In[49]:= **f[5] + g[2]**

Out[35]= 129

In[50]:= **f[5] g[2]**

Out[50]= 500

Además, en el caso de las funciones se puede realizar la operación composición $f \circ g$ ó $g \circ f$.

In[51]:= **g[f[x]]**

Out[51]= $2 + x^3$

In[52]:= **f[g[x]]**

Out[52]= $(2 + x)^3$

3.5.5. Gráficas

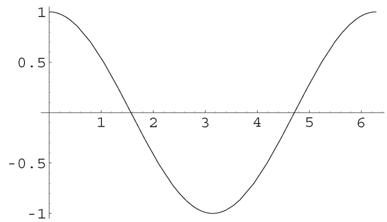
Una práctica muy habitual cuando trabajamos con funciones es dibujarlas, lo que nos va a permitir visualizar sus máximos, mínimos, puntos de corte con los ejes,... Dibujar una función en *Mathematica* es muy sencillo, para ello utilizamos la siguiente opción:

Plot[f[x],{x,xmin,xmax}]

donde **f[x]** indica la función que deseamos dibujar, **x** es la variable sobre la que vamos a realizar la gráfica y **xmin, xmax** son los extremos del intervalo en el que queremos realizar la representación gráfica.

Así, si deseamos dibujar la gráfica de la función $\cos(x)$ para valores de x entre 0 y $2\,\pi$:

In[53]:= **Plot[Cos[x], {x, 0, 2 π}]**



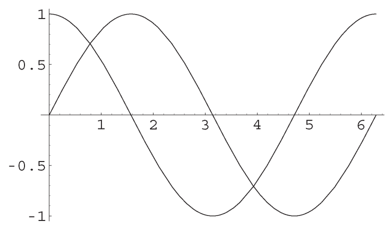
Out[53]= - Graphics-

Puede que lo que nos interese sea dibujar varias funciones juntas en la misma gráfica, en ese caso utilizamos la opción:

Plot[{f_1,...,f_n},{x,xmin,xmax}]

Por ejemplo, para dibujar las funciones $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$:

In[54]:= **Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 π}]**



Out[54]= - Graphics-

E 3.4.1 **Define las funciones** $f(x) = x^2 + 2\,x + 1$ **y** $g(y) = \dfrac{y^2}{2} + 7$.

E 3.4.2 **Calcula la suma, resta, multiplicación, división y composición en ambos sentidos de las funciones definidas en el ejercicio anterior. Simplifica al máximo los resultados obtenidos. Para ello puedes utilizar la función** `Simplify[arg]`.

E 3.4.3 **Dibuja las funciones** $f(x)$ **y** $g(x)$ **del ejercicio E.3.4.1. en el intervalo** $(-10, 10)$.

E 3.4.4 **Dibuja las funciones $\frac{\textbf{sen}(x)}{x}$, sen $\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{x}{|x|}$, $\frac{1}{x}$ en diferentes intervalos. Observa lo que sucede en aquellos intervalos que contienen al cero.**

3.5.6. Límites

El cálculo de límites es realmente sencillo con *Mathematica*, si queremos calcular $\lim_{x\to x_0} expr$ sólo tenemos que utilizar la opción[1]:

Limit[*expr*, $x \to x_0$]

Por ejemplo, para calcular un límite tan complicado como $\lim_{x\to 0} \frac{\log(\mathrm{Cot}(-\frac{x}{\log(x)})) - \log(\frac{1}{x})}{\log(\log(x))}$ es suficiente con escribir la expresión siguiente:

In[55]:= **Limit[(Log[Cot[-x/Log[x]]] - Log[1/x]) / Log[Log[x]], x→0]**

Out[55]= 1

Si lo que queremos es calcular el límite por direcciones debemos incluir la indicación: **Direction → -1** si queremos calcular el límite por la derecha y **Direction → 1** si queremos calcular el límite por la izquierda.

In[56]:= **Limit[1/x, x → 0, Direction → -1]**

Out[56]= ∞

In[57]:= **Limit[1/x, x → 0, Direction → 1]**

Out[57]= $-\infty$

En ocasiones *Mathematica* calcula mal los límites dando por defecto el resultado del límite por la derecha, por este motivo SIEMPRE se debe comprobar el resultado obtenido calculando los límites por direcciones.

3.5.7. Derivadas

Calcular derivadas es igualmente sencillo, si queremos derivar una función $f(x)$ que tenemos previamente definida simplemente debemos utilizar la opción **D[f[x],x]**.

In[58]:= **f[x_]:=Sin[x^2]**

In[59]:= **D[f[x],x]**

Out[59]= $2\,xCos[x^2]$

Otra forma de calcular la misma derivada es:

In[60]:= $\partial_x f[x]$

Out[60]= $2\,xCos[x^2]$

[1] el símbolo → se escribe con el signo “menos” seguido del signo “mayor” o utilizando la orden correspondiente de la paleta.

Cuando realizamos la derivada de una función utilizando la paleta debemos tener mucho cuidado a la hora de escribir la expresión correspondiente ayudándonos siempre por paréntesis. Veamos la diferencia entre utilizar paréntesis o no hacerlo con un ejemplo:

In[61]:= $\partial_x x^4 + 5$

Out[61]= $5 + 4\,x^3$

In[62]:= $\partial_x (x^4 + 5)$

Out[62]= $4\,x^3$

Para calcular la derivada segunda:

In[63]:= **D[f[x], x, x]**

Out[63]= $2\,Cos[x^2] - 4\,x^2\,Sin[x^2]$

o también podemos hacerlo en la forma:

In[64]:= $\partial_{x,x} f[x]$

Out[64]= $2\,Cos[x^2] - 4\,x^2\,Sin[x^2]$

o también podemos hacerlo en la forma:

In[65]:= **D[f[x], {x, 2}]**

Out[65]= $2\,Cos[x^2] - 4\,x^2\,Sin[x^2]$

En este último caso el 2 indica el número de veces que debemos derivar respecto de la variable que aparece entre llaves, en este caso la x.

Debemos recordar que el hecho de que una función sea derivable en un punto implica que la función es continua; sin embargo que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en ese punto.

Un ejemplo sencillo de función continua, pero no derivable, en un punto es la función $f(x) = |x|$ en el punto $x = 0$. Veámoslo: En primer lugar empezamos definiendo de forma adecuada dicha función, para ello utilizamos una estructura nueva

- **If[cond, verdad, falso]**: esta función evalúa en primer lugar la condición **cond**, si cierta realiza **verdad** y si no lo es realiza **falso**.

In[66]:= **f[x_] := If[x > 0, x, -x]**

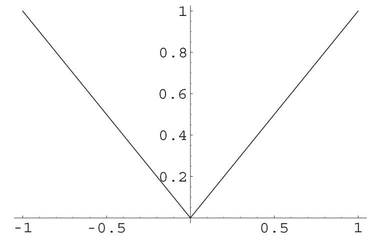
A continuación calculamos su derivada

In[67]:= **fx = D[f[x], x]**

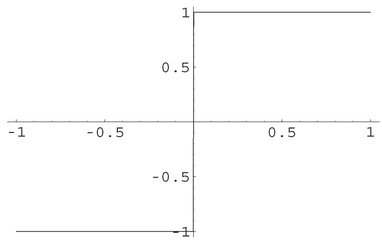
Out[67]= If[x > 0, 1, -1]

Notemos que *Mathematica* da la derivada dividida en trozos; debido a que la derivada para valores de x positivos vale 1 y para valores de x negativos vale -1 podemos deducir que la función no es derivable en $x = 0$, ya que los límites no coinciden cuando nos acercamos a ese punto.

Veamos como quedan gráficamente ambas funciones:



In[68]:= **Plot**[f[x], {x, -1, 1}]
Out[68]= - Graphics-
In[69]:= **Plot**[fx, {x, -1, 1}]



Out[69]= - Graphics-

La pregunta que nos podemos hacer a la vista del resultado anterior es porque no hemos utilizado la definición **f[x_]:=Abs[x]**. *Mathematica* no puede realizar esta derivada directamente ya que el valor absoluto está definido para valores complejos.

3.5.8. Integrales

Para hacer integrales en *Mathematica* tenemos diferentes posibilidades según el tipo de integral que vayamos a calcular. Así:

- **Integrate[f, x]** calcula la integral indefinida $\int f dx$.
- **Integrate[f, {x, xmin, xmax }]** calcula la integral definida $\int_{xmin}^{xmax} f dx$.

Por ejemplo, para calcular $\int x^2 dx$ utilizamos:
In[70]:= **Integrate[x^2, x]**
Out[70]= $\frac{x^3}{3}$

y para calcular $\int_0^1 x^2 dx$ utilizamos:

In[71]:= **Integrate**[x^**2, {x,0,1}**]

Out[71]= $\frac{1}{3}$

Puedes observar como *Mathematica* hace en pocos instantes integrales que necesitan aplicar partes varias veces (con el tiempo que eso conlleva al realizarlas manualmente):

In[72]:= **Integrate**[**Sin**[x] $(x^2 + x + 2)$**, x**]

Out[72]= $-x(1+x)\,Cos[x] + (1+2x)\,Sin[x]$

La integral definida la podemos calcular como hasta ahora utilizando la orden **Integrate**, con la que la integración se realiza utilizando la Regla de Barrow, o numéricamente, donde en este caso la integración se realiza utilizando fórmulas de cuadratura.

In[73]:= **Integrate**[x **Sin**[x]**, {x, 0,** π**}**]

Out[73]= π

In[74]:= **NIntegrate**[x **Sin**[x]**, {x, 0,** π**}**]

Out[74]= 3,14159

Aunque la orden **NIntegrate** se forma mediante la yuxtaposición de las órdenes **N** e **Integrate** no son lo mismo:

In[75]:= **Integrate**[**Abs**[x]^**(-1/2), {x, -2, 1}**]

Out[75]= $2 + 2\sqrt{2}$

In[76]:= **N**[**Integrate**[**Abs**[x]^**(-1/2), {x, -2, 1}**]]

Out[76]= 4,82843

Al utilizar esta orden lo que estamos realizando es, en primer lugar la integración y posteriormente su evaluación numérica.

In[77]:= **NIntegrate**[**Abs**[x]^**(-1/2), {x, -2, 1}**]

```
NIntegrate::"slwcon": "Numerical integration converging too slowly;
suspect one of the following: singularity, value of the integration
being 0, oscillatory integrand, or insufficient WorkingPrecision.
If your integrand is oscillatory try using the option
Method->Oscillatory in NIntegrate."

NIntegrate::"ncvb":
"NIntegrate failed to converge to prescribed
accuracy after 7 recursive bisections in x near x = 0.00390625."
```

Out[77]= 4,79343

En este caso la integración se ha realizado utilizando un método numérico que, como puede comprobarse, no es adecuado para esta integral. *Mathematica* nos permite elegir diferentes métodos para realizar las integrales de manera numérica, como el método de

Montecarlo. No vamos a entrar a detallar estos métodos, pero vamos a indicar como arreglar el ejemplo anterior, simplemente añadiendo una nueva indicación:

In[78]:= **NIntegrate[Abs[x]^(-1/2), {x, -2, 0, 1}]**

Out[78]= 4,82843

A contiuación mostramos algunos ejemplos en los que detallamos diferentes comportamientos de *Mathematica* al realizar las integrales:

In[79]:= **Integrate[E^(-x^2), x]**

Out[79]= $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,Erf[x]$

In[80]:= **Integrate[E^(-x^2), {x, -Infinity, Infinity}]**

Out[80]= $\sqrt{\pi}$

In[81]:= **N[Integrate[1/x^2, {x,-2,1}]]**

Out[81]= ∞

In[82]:= **NIntegrate[1/x^2, {x, -2, 1}]**

```
NIntegrate::"slwcon": "Numerical integration converging too slowly;
suspect one of the following: singularity, value of the integration
being 0, oscillatory integrand, or insufficient WorkingPrecision.
If your integrand is oscillatory try using the option
Method->Oscillatory in NIntegrate."

NIntegrate::"ncvb": "NIntegrate failed to converge to prescribed
accuracy after 7 recursive bisections in x near x = 0.00390625."
```

Out[82]= 9209,4

In[83]:= **NIntegrate[Sin[x]/x, {x, 1, Infinity}]**

```
NIntegrate::"slwcon": "Numerical integration converging too slowly;
suspect one of the following: singularity, value of the integration
being 0, oscillatory integrand, or insufficient WorkingPrecision.
If your integrand is oscillatory try using the option
Method->Oscillatory in NIntegrate."

NIntegrate::"ncvb":
"NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 7
recursive bisections in x near x = 7.722612390180509‘*^11"
```

Out[83]= $-5{,}5233$

In[84]:= **NIntegrate[Sin[x]/x, {x, 1, Infinity}, Method → Oscillatory]**

Out[84]= 0,624713

In[85]:= **Integrate[1/x, {x, -1, 1}, PrincipalValue → True]**

Out[85]= 0

E 3.4.5 **Define las funciones** $f(x) = e^x$ **y** $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$**. ¿Tienen alguna relación entre sí estas funciones?**

E 3.4.6 **Calcula** $f(0)$, $g(0)$, $f(1)$, $g(1)$, $f(-1)$, $g(-1)$, $f(10)$, $g(10)$, **donde** $f(x)$ **y** $g(x)$ **son las funciones definidas en el ejercicio anterior. Comenta los resultados.**

E 3.4.7 **Dibuja las funciones** $f(x)$ **y** $g(x)$ **del ejercicio E 3.4.5 en el intervalo** $(-5, 5)$**. Comenta los resultados.**

E 3.4.8 **Calcula el límite de cada una de las funciones del ejercicio E 3.4.4 en** $x = 0$**. Comprueba los resultados obtenidos en relación con las gráficas obtenidas en dicho ejercicio.**

E 3.4.9 **Calcula las integrales** $\displaystyle\int_0^{10} \mathrm{sen}(x)\, e^x\, dx$ **y** $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx$.

E 3.4.10 **Calcula los siguientes límites**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x) - \tan(x)}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(a\,x))}{\log(\cos(b\,x))}.$$

E 3.4.11 **Calcula aplicando L'Hôpital (si es posible) los límites del ejercicio anterior.**

E 3.4.12 **Calcula los siguiente límites laterales en el punto que se indica y comprueba los resultados obtenidos dibujando las funciones:**

a) $e^{\frac{1}{x-1}}$ en $x = 1$ b) $\sqrt{x-3}$ en $x = 3$

c) $\tan(x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$ d) $\dfrac{1-\cos(x)}{(1-\cos(\sqrt{x}))\mathrm{sen}(x)}$ en $x = 0$.

Al hacer el límite d) observa que puede hacerse aplicando equivalencias o L'Hôpital.

E 3.4.13 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\log(1+x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^4 + x^3\log(1+\frac{1}{x})} - x^2\right)$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5\,x^2 \,\mathrm{arcsen}(x/3)}{\mathrm{sen}^3(x) - \mathrm{sen}^5(x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log(1+x)} - \sqrt{1-\log(1+x)}}{x}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^2(2^{1/x^2} - 1)$.

E 3.4.14 **Calcula las derivadas primeras y segundas de las siguientes funciones, simplificando todo lo posible el resultado final:**

a) $\log \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$

b) $\dfrac{1}{2}\log(\tan(\dfrac{x}{2})) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

c) $\sqrt{\cos(x)}a^{\sqrt{\cos(x)}}$

d) $x\,(\operatorname{sen}(\log(x)) - \cos(\log(x)))$

e) $\arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)+\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}\right)$

f) $\arctan(\tan^2(x))$.

E 3.4.15 **Calcula las siguientes integrales**

a) $\displaystyle\int x^3\, e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int \arctan(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3-2\,x^2-5\,x+6}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^4-3\,x^3+4\,x^2-3\,x-3}{x^2-2\,x+1}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}\, dx$

f) $\displaystyle\int \sqrt{1+\cos(2\,x)}\, dx$.

E 3.4.15 **Dibuja la función** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **en el intervalo** $[-1, 1]$ **y comprueba el resultado que obtienes al calcular el** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$**.**

3.6. Funciones de varias variables

Es bien conocido que el concepto de función real de una variable real, que hemos visto y utilizado en la sección anterior, se puede generalizar fácilmente a funciones reales de varias variables reales. Así, nos encontramos con funciones de la forma

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & (f_1, \ldots, f_m). \end{array}$$

Las funciones reciben el nombre de **campos escalares** si $m = 1$ o de **campos vectoriales** si $m > 1$. En el caso de campos vectoriales cada uno de los campos escalares $f_1, \ldots, f_m$ recibe el nombre de **componente** de f.

En esta sección nos centraremos en el trabajo en *Mathematica* de campos escalares en los que $n > 1$.

3.6.1. Definición y operaciones aritmética básicas

Para definir campos escalares de varias variables reales seguimos un proceso similar al que se realiza para la definición de funciones reales de una variable real.

In[86]:= **f[x_ ,y_]:= x y + 2 x-3 y**

In[87]:= **g[x_ ,y_ ,z_]:= z Cos[y] + 2 x y+ z**

Para realizar operaciones aritméticas con funciones de varias variables procedemos de la misma forma que cuando trabajamos con funciones de una variable.

In[88]:= **f[x, a] + g[x, a, z]**
Out[88]= -3 a + 2 x + 3 a x + z + z Cos[a]

In[89]:= **f[x, y] g[y, x, z]**
Out[89]= (2 x - 3 y + x y) (2 x y + z + z Cos[x])

In[90]:= **Expand[f[x, y] g[y, x, z]]**
Out[90]= 4 x^2 y - 6 x y^2 + 2 x^2 y^2 + 2 x z - 3 y z + x y z + 2 x z Cos[x] - 3 y z Cos[x] + x y z Cos[x]

In[91]:= **Expand[f[x, g[a, b, c]]]**
Out[91]= -6 a b - 3 c + 2 x + 2 a b x + c x - 3 c Cos[b] + c x Cos[b]

3.6.2. Límites de funciones de varias variables

El cálculo de límites en varias variables es siempre complicado. *Mathematica* nos permite realizar el cálculo de límite iterados o reiterados; para una función de n variables reales la instrucción a utilizar es:

- **Limit[Limit[. . . [Limit[***var1*→ *val1*]**,***var2* → *val2*]**,. . . ,***varn* → *valn*]

Cuando calculamos límites de funciones de varias variables en *Mathematica* , debemos tener en cuenta que la instrucción:
In[92]:= **Limit[Limit[** $\frac{x}{x-y}$**, x →0], y → 0]**
Out[92]= 0
hace que realicemos en primer lugar el límite en la variable x y a continuación calculemos el límite de la función resultante en la variable y, mientras que la instrucción
In[93]:= **Limit[Limit[** $\frac{x}{x-y}$**, y→0], x→ 0]**
Out[93]= 1
hace que realicemos en primer lugar el límite en la variable y y a continuación calculemos el límite de la función resultante en la variable x.

Notemos que en este caso los límites iterados no coinciden, de lo que fácilmente deducimos que la función no posee límite en el punto $(0, 0)$.

Mathematica **no calcula límites globales para funciones de varias variables**, por lo tanto para ver si un límite en varias variables existe debemos recurrir a las técnicas habituales. A continuación mostramos un ejemplo en el que se demuestra que los límites iterados de una función de dos variables en el punto $(0,0)$ son iguales y sin embargo el límite de la función en ese punto no existe; para demostrar que dicho límite no existe utilizaremos la técnica del cálculo de límites por direcciones:

In[94]:= **f[x_, y_]:=**$\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

In[95]:= **Limit[Limit[f[x, y], y → 0], x → 0]**
Out[95]= 0

In[96]:= **Limit[Limit[f[x, y], x → 0], y→ 0]**
Out[96]= 0

In[97]:= **Limit[f[x, y] /. y → λ x , x → 0]**
Out[97]= $\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$

Para realizar este límite hemos introducido una nueva orden que nos permite realizar sustituciones con *Mathematica*, es la orden

exp /. regla

dicha orden aplica la regla o lista de reglas a la expresión de la izquierda. En nuestro caso la asignación que hemos realizado es f[x, y] /. y → λ x; con esta orden le estamos indicando a *Mathematica* que en la función f[x, y] sea sustituido el valor y por λ x.

E 3.5.1 **Demuestra que no existen los límites de las siguientes funciones en el punto (0,0):**

$a)\quad f(x,y)=\dfrac{y^3-x^2}{x^2+y^2}$ $\qquad b)\quad f(x,y)=\dfrac{y^2-x^4}{x^4+y^2}$

$c)\quad f(x,y)=\dfrac{y+x^2+x}{y-x}$ para $y\neq x$ $\qquad d)\quad f(x,y)=\dfrac{x\,y^3}{x^2+y^6}.$

3.6.3. Derivadas parciales

Para calcular derivadas parciales de funciones de varias variables procedemos de forma similar al cálculo de derivadas para funciones de una variable. Solamente debemos tener en cuenta que en este caso podemos calcular derivadas respecto a varias variables y que el orden en el que se haga la derivación dependerá del orden en el que se escriban las variables.

In[98]:= **f[x_, y_]:=**$x^2\,y^2$

In[99]:= **D[f[x, y], x]**
Out[99]= $2\,x\,y^2$

In[100]:= ∂_x**f[x, y]**
Out[100]= $2\,x\,y^2$

In[101]:= **D**[**f**[**x, y**], **y**]
Out[101]= $2\,x^2\,y$

In[102]:= ∂_y**f**[**x, y**]
Out[102]= $2\,x^2\,y$

In[103]:= **D**[**f**[**x, y**], **x, x**]
Out[103]= $2\,y^2$

In[104]:= **D**[**f**[**x, y**], **x, y**]
Out[104]= $4\,x\,y$

In[105]:= **D**[**f**[**x, y**], **{y, 2}**]
Out[105]= $2\,x^2$

In[106]:= $\partial_{x,x}$**f**[**x, y**]
Out[106]= $2\,y^2$

E 3.5.2 **Comprueba si son ciertas las siguientes igualdades:**

a) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x-y}$, $\quad x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,x\,y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

b) $f(x,y) = e^{ax}\cos(ay)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

c) $f(x,y,t) = e^{-t}(\mathrm{sen}(x) + \cos(y))$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial f}{\partial t}$

d) $f(x,y,t) = \mathrm{sen}(a\,x)\ \mathrm{sen}(b\,y)\ \mathrm{sen}(k\,t)$, $\quad (a^2+b^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = k^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

e) $f(x,y) = \log(x^2 + x\,y + y^2)$, $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2$

Para que el **gradiente** de una función real de varias variables reales exista es necesario que existan todas sus derivadas parciales, ya que el gradiente se calcula en la forma $\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = (\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$.

In[107]:= **f[x_,y_,z_]:=**$e^x\,y^2\,z$

In[108]:= **grad**[**x_,y_,z_**] **:= {D[f[x, y, z], x], D[f[x, y, z], y], D[f[x, y, z], z]}**
grad[x,y,z]
Out[108]= $\{e^x\,y^2\,z, 2\,e^x\,y\,z, e^x\,y^2\}$

Si queremos conocer el valor del gradiente en un punto determinado, hacemos una asignación de la forma

In[109]:= **grad[x,y,z]/. {x → 0, y → a, z → 5}**
Out[109]= $\{5\,a^2, 10\,a, a^2\}$

E 3.5.3 **Dada la función $g(x,y,z) = x\,z^2 + y^2\,z$ determina el valor máximo de la derivada direccional en el punto (2,1,-1).** [1]

3.6.4. Derivación aplicando la regla de la cadena

Cuando trabajamos con funciones de varias variables es habitual que a su vez estas variables dependan de otras. Por ejemplo, si tenemos la representación de una circunferencia de radio a en coordenadas cartesianas y queremos pasar dicha circunferencia a coordenadas polares. En general tenemos una función $z = f(x,y)$ donde las variables x e y se pueden escribir a su vez como función de las variables r y s, es decir, $x = g(r,s)$ e $y = h(r,s)$. En el caso en el que las funciones f, g y h sean funciones continuas, para las que existan todas las derivadas parciales correspondientes, podemos calcular las derivadas de z respecto de r y s. Recordemos a continuación como se hace:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Veamos como hacerlo con *Mathematica* con un ejemplo. Para ello empezamos definiendo las funciones:

In[110]:= **f[x_,y_]:=**$x^2 + y^2$
x[r_,s_]:=r Cos[s]
y[r_,s_]:=r Sin[s]

a continuación definimos todas las derivadas parciales que aparecen involucradas en la regla de la cadena

In[113]:= **fx[x_, y_] := D[f[x, y], x]**
fy[x_, y_] := D[f[x, y], y]
xr[r_, s_] := D[x[r, s], r]
xs[r_, s_] := D[x[r, s], s]
yr[r_, s_] := D[y[r, s], r]
ys[r_, s_] := D[y[r, s], s]

[1] Para calcular este valor de forma automática podemos utilizar la orden **VectorNorm[vec,p]** que nos devuelve la norma **p** del vector **vec**, para que esta orden funcione debemos cargar antes de utilizarla el paquete ≪ LinearAlgebra‘MatrixManipulation‘

y ahora calculamos la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de r y de s aplicando la regla de la cadena:

In[119]:= **fr = Simplify[fx[x, y] xr[r, s] + fy[x, y] yr[r, s] /. x → x[r, s] /. y → y[r, s]]**

Out[119]= $2\,r$

In[120]:= **fs = Simplify[fx[x, y] xs[r, s] + fy[x, y] ys[r, s] /. x → x[r, s] /. y → y[r, s]]**

Out[120]= 0

Sin embargo *Mathematica* nos permite realizar esta operación de forma más sencilla:

In[121]:= **frMath = Simplify[D[f[x[r, s], y[r, s]], r]]**

Out[121]= $2\,r$

In[122]:= **fsMath = Simplify[D[f[x[r, s], y[r, s]], s]]**

Out[122]= 0

y como podemos observar ambas soluciones coinciden.

3.7. Utilización de paletas

Trabajar con *Mathematica* parece complicado, sin embargo no es así. La aplicación *Mathematica* posee una serie de paletas que facilitan enormemente el trabajo; además algunas de las opciones de esta ayuda nos va a permitir mejorar la presencia de nuestros documentos. A continuación vamos a mostrarte como funcionan algunas de estas opciones.

Para que las paletas aparezcan en pantalla debemos pulsar la opción **File/Palettes**, al hacerlo se despliega un menú lateral con las siguientes opciones:

1. **AlgebraicManipulation**: esta paleta nos permite realizar operaciones de manipulación algebraica básicas, tales como factorizar, simplificar, expandir una expresión...

   Para utilizarla únicamente debemos seleccionar la expresión sobre la que deseamos realizar la operación y a continuación pulsar la opción que aparece en la paleta. Notemos que al utilizarla NO queda fijada en pantalla la instrucción que hemos seleccionado, sino que únicamente queda reflejado en pantalla el resultado final.

2. **BasicCalculations**: esta paleta es realmente útil porque en ella encontramos la mayor parte de las operaciones que *Mathematica* nos permite realizar, organizadas por temas.

3. **BasicInput**: esta paleta permite realizar de forma sencilla y con una agradable presencia física muchas de las operaciones que se utilizan de forma más habitual. Así podemos realizar potencias, fracciones, raíces, integrales, derivadas, sumatorios, productos, matrices ... Esta paleta también nos permite utilizar letras griegas α, β,

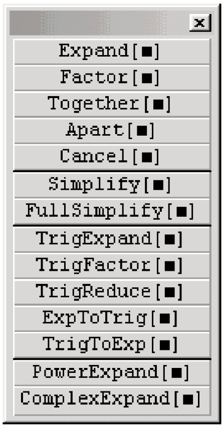


Figura 3.1: AlgebraicManipulation

..., símbolos especiales π, ∞, , ..., así como algunos operadores habituales $\neg$, $\leq$, $\cup$,...

Veamos la forma de utilizar esta paleta para calcular $\int \frac{\text{sen}(x)}{1+x}dx$.

a) escribe Sin[x],

b) selecciona la expresión Sin[x] que acabamos de escribir,

c) pulsa la opción de fracción de la paleta (observa que al hacerlo el cursor se coloca de forma automática en el denominador),

d) escribe la expresión correspondiente al denominador, y selecciona toda la expresión

e) selecciona la opción correspondiente a la integral indefinida en la paleta (observa que al hacerlo el cursor se coloca automáticamente en la posición de diferencial de la variable sobre la que deseamos integrar, en este caso la x),

f) indica la variable sobre la que vamos a integrar.

Nota: si deseamos pasar de un campo a otro de las expresiones es suficiente con pulsar el tabulador.

4. **BasicTypesetting**: esta paleta nos permite introducir todo tipo de caracteres, operadores, ... de forma sencilla.

5. **CompleteCharacters**: esta paleta nos permite introducir diferentes tipos y estilos de letras, por ejemplo: las letras griegas, letras con estilo gótico,..., todos los

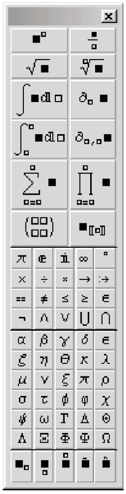


Figura 3.2: BasicInput

símbolos técnicos que *Mathematica* permite, así como diferentes formas e iconos junto con los operadores generales, relacionales y diferentes tipos de flechas.

6. **InternationalCharacters**: esta paleta nos permite introducir caracteres internacionales especiales como por ejemplo la letra ñ. No obstante su utilidad es muy restringida, ya que actualmente cualquier teclado permite introducir estos caracteres sin problemas.

7. **NotebookLauncher**: esta paleta nos permite crear ficheros con diferentes estilos.

Ejercicios de funciones de una variable (extra)

1. **Define la función** $f(x) = x^2$ **y calcula** $f(5)$, $f(-5)$, $f(a)$, $f(-a)$ **y** $f(a^2)$.

2. **Define la función** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+4}$ **y calcula, si es posible,** $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ **y** $f(-2)$. **Aproxima los resultados numéricamente.**

3. **Define las funciones** $f(x) = x^2$ **y** $g(x) = x + 5$. **Calcula** $f(x) + g(x)$; $f(4) - g(7) + f(0)$.

4. **Define las funciones** $f(x) = x^3 + 5\,x^2 + 3\,x - 9$ **y** $g(x) = x^2 + 2\,x - 3$**. Calcula, si es posible:**

   a) $f(x)g(x)$.

   b) $f(x)/g(x)$.

   c) $f(4)/g(2)$.

   d) $1/g(1)$.

5. **Define las funciones** $f(x) = x^2$ **y** $g(x) = x + 5$**. Calcula, si es posible:**

   a) $f \circ g(x)$.

   b) $g \circ f(x)$.

   c) $f \circ f(x)$.

   d) $f \circ g \circ f(x)$.

   e) $g \circ f \circ g(x)$.

6. **Define las funciones** $f(x) = \sqrt{x}$ **y** $g(x) = \mathbf{sen}(x)$**. Calcula, si es posible:**

   a) $f \circ g(x)$.

   b) $g \circ f(x)$.

   c) $f \circ g(-\frac{\pi}{2})$.

   d) $g \circ f(-\frac{\pi}{2})$.

7. **Define la función**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

   y calcula $f(x)$ **para dos valores positivos y para dos valores negativos de** x**.**

8. **Define la función**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 4, \\ \dfrac{1}{x - 4} & \text{si} \quad x > 4, \end{cases}$$

   y calcula un valor de $f(x)$ **en cada intervalo de definición.**

9. **Define las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ para las funciones**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0, \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

y $g(x) = x + 3$ y obtén algunos valores particulares.

10. **Halla el valor de a que haga que la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \leq 2, \\ a\,x^2 & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

sea continua.

11. **Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:**

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 4, \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x > 4. \end{cases}$$

12. **Calcula**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x}.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.$

Observa que en el caso a) el límite global está correctamente calculado, sin embargo esto no sucede en el caso b).

13. **Calcula**

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2 - 3\,x + 2}.$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x^3}{x^3}.$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1+x^3}{x^3}.$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2+x^4)|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{(2+x^4)|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{(2+x^4)|x|}{x}.$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt[3]{(1-\cos(\frac{\pi}{2}-x))^2}}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt[3]{(1-\cos(\frac{\pi}{2}-x))^2}},$

$\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2}-x)}{\sqrt[3]{(1-\cos(\frac{\pi}{2}-x))^2}}.$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{2-e^{-\frac{1}{x}}}$, $\quad \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{2-e^{-\frac{1}{x}}}$, $\quad \lim_{x\to 0^-} \dfrac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{2-e^{-\frac{1}{x}}}$.

14. **Calcula, en los casos en los que sea posible, los siguiente límites**

    a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$.

    b) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x\,e^{-x}}{6\,x^2+2}$.

    c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x-3-\frac{1}{x^2}}{2\,x+5+\frac{1}{x^2}}$.

    d) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{2\,x^2+3}{2\,x^2+5}\right)^{2\,x^2+3}$.

    e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2\,x}{x^2-4\,x+4}$.

    f) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3}\right)$.

    g) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2\,x}{e^x+4}\right)^x$.

    h) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$.

15. **Calcula las derivadas primeras y segundas de las siguientes funciones simplificando al máximo el resultado obtenido:**

    a) $f(x)=x^3+3\,x^2+x+3$.

    b) $f(x)=a\,x^2+2\,a\,x$.

    c) $f(x)=|x|$.

    d) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)}$.

    e) $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

    f) $f(x)=x^{\operatorname{sen}(x)}$.

16. **Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando el resultado lo más posible:**

    a) $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$.

b) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

c) $f(x) = \dfrac{4\,x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}{20\,\cos^5(x)} + \dfrac{4\,x\,\mathrm{sen}(x) - 2\,\cos(x)}{15\,\cos^3(x)}$
$+\dfrac{8}{15}(x\tan(x) + \log(\cos(x)))$.

d) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$.

17. **Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función $f(x) = e^{a\,x}$sen$(\pi\,x)$. Calcular $f^{3)}(0)$ y $f^{3)}(1)$. Observa que para realizar estos cálculos debes utilizar el operador asignación.**

18. **Dibuja en un mismo gráfico las funciones sen(x), cos(x) y tan(x) en el intervalo [-10,10].**

19. **Calcula las integrales siguientes**

a) $\displaystyle\int 3\,x^2\,dx$. **b)** $\displaystyle\int x^a\,dx$.

c) $\displaystyle\int \frac{2\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx$. **d)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,dx$.

e) $\displaystyle\int (\mathrm{sen}(x) - \cos(x))^2\,dx$. **f)** $\displaystyle\int \frac{7}{9^{13\,x}}\,dx$.

f) $\displaystyle\int e^x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$. **g)** $\displaystyle\int p\,(1 - e^{q\,x})\,dx\,dx$.

h) $\displaystyle\int \log^3(x)dx$ **i)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$.

j) $\displaystyle\int \mathrm{sen}^4(x)dx$ **k)** $\displaystyle\int \mathrm{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$.

l) $\displaystyle\int x^2\,\cos(x)dx$ **ll)** $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$.

20. **Calcula una primitiva de la función $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ que pase por el punto $(1/2, -1)$.**

21. **Calcula (si es posible) las integrales**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2\,dx$. **b)** $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\,dx$.

c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x}\,dx$. **d)** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$.

e) $\displaystyle\int_{2}^{10} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$. **f)** $\displaystyle\int_{0}^{10} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx$.

22. **Calcula el valor de las siguiente integrales indefinidas:**

a) $\displaystyle\int_1^e \log(x)dx.$ **b)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx.$ **d)** $\displaystyle\int_\pi^{3\pi/2} \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{3}\right)dx.$

e) $\displaystyle\int_0^{2\,\pi} \operatorname{sen}(x)dx.$ **f)** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx.$

23. **Halla el área encerrada entre las gráficas de las curvas $y = x$ e $y = x^2$.**

24. **La página de un libro ha de contener $32\,cm^2$ de texto. Los márgenes superior e inferior deben medir $2\,cm$ y los laterales $1\,cm$. Halla las dimensiones de la página más económica.**

25. **Representa las siguientes funciones en los intervalos que se indican:**

a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x+2)^2}$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10].**

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10].**

c) $f(x) = \log(\operatorname{sen}(x))$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10].**

d) $f(x) = (1-x)\,e^x$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10].**

e) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10]. ¿Es continua en $x = 0$?**

f) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ **en los intervalos [-1,1] y [-10,10]. ¿Es continua en $x = 0$?**

26. **Calcula la única primitiva F(x) de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-5\,x+6)^2}$ que satisface $F(4) = 0$.**

27. **Calcula el área encerrada por $\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[-1/2, 1/2]$.**

28. **Dibuja las funciones dadas por $g(x) = 14\,x - 2\,x^2$ y $h(x) = 35 - 5\,x$ y calcula el área encerrada entre ambas.**

29. **Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = 1$.**

30. **Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $y^2 = x$ e $y = x-2$.**

Ejercicios de funciones de varias variables (extra)

1. **Define la función** $f(x,y)=x^2\,y-5\,x+2\,y$ **y calcula** $f(0,1)$ **y** $f(1,2)$**.**

2. **Define la función** $g(x,y,z)=\cos(x+y+z)-x^2$ **y calcula** $g(\pi,1,-1)$**.**

3. **Define la función** $h(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1+x_2+x_3^2+e^{x_4}$ **y calcula** $h(1,1,1,1)$**.**

4. **Demuestra que no existe el límite**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\,y-x+y}{x+y}$$

utilizando límites iterados.

5. **Demuestra que no existe el límite**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\,x\,y}{x^2+y^2}$$

utilizando límites direccionales.

6. **Demuestra que no existe el límite en el origen para las siguientes funciones**

a)$f(x,y)=\dfrac{x+y+x^2}{x-y}$.

b)$f(x,y)=\dfrac{y^2-x^3}{y^4+x^2}$.

c)$f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

7. **Calcula las derivadas parciales de primer, segundo y tercer orden de la función** $f(x,y)=x\,y\,(x+y+1)$**.**

8. **Sea** $z(x,y)=\sqrt{\log(x\,y)+\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{y}\right)}$. **Calcula** $x\,z\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,z\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9. **Halla la derivada primera de** $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **respecto de** t**, siendo** $x=a\cos(t)$ **e** $y=a\,\operatorname{sen}(t)$.

10. **Calcula y simplifica en lo posible las derivadas parciales de primer orden de las siguiente funciones:**

    a) $f(x,y) = \cos(x\,y) + x\,\cos(y)$.

    b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

    c) $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{(x+y)^2}{x^2y^2}} + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x+y}{x\,y}\right)$.

    d) $f(x,y,z) = \log\left(\dfrac{x^2+2\,z}{y}\right)$.

11. **Calcula y simplifica en lo posible las derivadas parciales de segundo orden de las siguiente funciones:**

    a) $f(x,y) = x\,\cos(y) - y\,\cos(x)$.

    b) $f(x,y) = \log(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

12. **Comprueba si son ciertas las siguientes expresiones:**

    a) $\partial_{xx}z(x,y,t) + \partial_{yy}z(x,y,t) = \partial_t z(x,y,t)$ **para** $z(x,y,t) = e^{-t}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))$.

    b) $(a^2+b^2)\partial_{tt}z(x,y,t) = k^2(\partial_{xx}z(x,y,t) + \partial_{yy}z(x,y,t))$ **para** $z(x,y,t) = \operatorname{sen}(a\,x)\operatorname{sen}(b\,y)\operatorname{sen}(k\,t)$.

    c) $x^2\partial_x z(x,y) + y\,\partial_y z(x,y) = 0$ **para** $z(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{x} + \log(y)$.

    d) $x^2\partial_x z(x,y) + y\,\partial_y z(x,y) = y^2$ **para** $z(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{x} + \log(y)$.

13. **Mediante la regla de la cadena obtén las derivadas parciales de la función compuesta** $z(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ **siendo** $u(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$ **y** $v(x,y) = \cos(x+y)$.

Capítulo 4
Álgebra Básica

4.1. Conjuntos: listas

Una lista es un conjunto de objetos. Estos pueden ser de diferente tipo: en una lista podemos incluir números, funciones, variables, o incluso listas,... Ejemplos de listas son:

In[1]:= **lista={a,b,c,E};**

In[2]:= **l={Sin[x],Cos[x],I}**
Out[2]= {Sin[x],Cos[x],I}

In[3]:= **x=2;**
l
Out[4]= {Sin[2],Cos[2],I}

In[5]:= **lis={{1,2,3},{Sqrt[2],0},{x,y}}**
Out[5]= {{1,2,3},{$\sqrt{2}$,0},{2,y}}

(Observemos que **x** conservará el valor asignado 2 hasta que no se limpie su contenido).

Para designar al elemento que se encuentra en la posición i de una lista, lo haremos con la instrucción **lista**[[**i**]]:

In[6]:= **lista**[[**2**]]
Out[6]= b

Si es una lista de listas, con **lista**[[**i,j**]] o **lista**[[**i**]][[**j**]] designaremos el elemento j de la sublista i:

In[7]:= **lis**[[**2,1**]]
Out[7]= $\sqrt{2}$

In[8]:= **lis**[[**1,2**]]
Out[8]= 2

Si son tres listas anidadas, será **lista**[[**i,j,k**]] o **lista**[[**i**]][[**j**]][[**k**]] y así sucesivamente. Veamos el siguiente ejemplo:

In[9]:= **tabla={{{0,0},{0,1}},{{2,3},{5,9}},{{4,1},{0,5}}};**

In[10]:= **tabla**[[**3**]]
Out[10]= {{4,1},{0,5}}

In[11]:= **tabla**[[**3,1**]]
Out[11]= {4,1}

In[12]:= **tabla**[[**3,1,2**]]
Out[12]= 1

4.1.1. Construcción de listas

Como hemos visto en los ejemplos, para escribir una lista simplemente hay que dar el conjunto de datos entre llaves **{ }** y separados por comas. Sin embargo, podemos utilizar también las siguientes órdenes para generar listas.

- **Table**[**expr, {i,imin,imax},{j,jmin,jmax},...**]

  Genera una lista calculando la expresión **expr** para valores anidados de i,j, etc.

  In[13]:= **lista=Table**[**i^3,{i,0,3}**]
  Out[13]= {0,1,8,27}

  o bien **Table**[**expr, {i,imin,imax,incr},{j,jmin,jmax,incr},...**]

  In[14]:= **lista=Table**[**i^3,{i,0,3,3}**]
  Out[14]= {0,27}

  tomando el incremento del índice 3 (por defecto se considera 1). En el caso en el que el tamaño máximo **imax**, **jmax**,... no sea exactamente **imin+ i * incr**,... se toma como máximo el mayor entero más pequeño que **imax**, **jmax**,... que lo cumpla. También podemos obtener listas de listas:

  In[15]:= **lista=Table**[**i*j,{i,0,3},{j,2,3}**]
  Out[15]= {{0,0},{2,3},{4,6},{6,9}}

  donde para cada i fijo tenemos una sublista y dentro de ésta se toman los valores de $i * j$ según varía j.

  In[16]:= **lista=Table**[**i+j,{i,0,3},{j,2,3}**]
  Out[16]= {{2,3},{3,4},{4,5},{5,6}}

⊙ **Range[imin,imax,di]**

Genera una lista desde **imin** hasta **imax** con paso **di**. Por defecto, si no se incluye, el paso es 1. Y si sólo se incluye el argumento **imax**, la lista va desde 1 hasta dicho argumento.

In[17]:= **tabla=Range[2,15,3]**
Out[17]= {2,5,8,11,14}

En este caso, la lista va de 2 a 15 y toma todos los valores de 3 en 3. El primer y tercer parámetro (2 y 3 en el ejemplo) son opcionales, pudiendo eliminarse y en su defecto se considera 1:

In[18]:= **tabla=Range[7]**
Out[18]= {1,2,3,4,5,6,7}

4.1.2. Operaciones sobre listas

Podemos realizar las siguientes operaciones:

⊘ **Part[expr,i,j,...]**

Nos proporciona el elemento [[i]][[j]] de **expr**.

In[19]:= **tabla={2,3,{1,5,{0,4}},{I,{9,12,13}},E};**

In[20]:= **Part[tabla,4]**
Out[20]= {I,{9,12,13}}

In[21]:= **Part[tabla,4]==tabla[[4]]**
Out[21]= True

In[22]:= **Part[tabla,4,2]**
Out[22]= {9,12,13}

In[23]:= **Part[tabla,4,2]==tabla[[4,2]]**
Out[23]= True

In[24]:= **Part[tabla,4,2,3]**
Out[24]= 13

In[25]:= **Part[tabla,4,2,3]==tabla[[4,2,3]]**
Out[25]= True

⊘ **First**[**expr**] y **Last**[**expr**]

Proporcionan el primer y último elemento de la expresión **expr**.

In[26]:= **First**[**tabla**]
Out[26]= 2

In[27]:= **Last**[**tabla**]
Out[27]= E

⊘ **Take**[**list,n**]

Devuelve los **n** primeros elementos de la lista. Si **n** es negativo, devuelve los |**n**| últimos.

In[28]:= **Take**[**tabla,2**]
Out[28]= {2,3}

In[29]:= **Take**[**tabla,-2**]
Out[29]= {{I,{9,12,13}},E}

⊘ **Drop**[**list,n**]

Extrae los **n** elementos primeros de la lista. Si **n** es negativo, extrae los |**n**| últimos.

In[30]:= **Drop**[**tabla,2**]
Out[30]= {{1,5,{0,4}},{I,{9,12,13}},E}

In[31]:= **Drop**[**tabla,-2**]
Out[31]= {2,3,{1,5,{0,4}}}

⊘ **Length**[**expr**]

Proporciona el número de elementos de **expr**.

In[32]:= **Length**[**tabla**]
Out[32]= 5

⊘ **Prepend**[**expr,elem**] y **Append**[**expr,elem**]

Añaden el elemento **elem** a la lista (al principio y al final respectivamente).

In[33]:= **Append**[**tabla,{1,1}**]
Out[33]= {2,3,{1,5,{0,4}},{I,{9,12,13}},E,{1,1}}

In[34]:= **Prepend**[**tabla,-I**]
Out[34]= {-I,2,3,{1,5,{0,4}},{I,{9,12,13}},E}

⊘ **Sort**[**list**]

Ordena los elementos de la lista.

In[35]:= **Sort**[**tabla**]
Out[35]= {2,3,E,{I,{9,12,13}},{1,5,{0,4}}}

⊘ **Join**[**list1,list2,...**]

Concatena dos o más listas.

In[36]:= **lista={x,3,{I,-I}}**
Out[36]= {x,3,{I,-I}}

In[37]:= **Join**[**tabla,lista**]
Out[37]= {2,3,{1,5,{0,4}},{I,{9,12,13}},E,x,3,{I,-I}}

⊘ **Union**[**list1,list2,...**] e **Intersection**[**list1,list2,...**]

Proporcionan una lista con la unión y la intersección (ordenadas) de dos o más listas.

In[38]:= **Union**[**tabla,lista**]
Out[38]= {2,3,E,x,{I,-I},{I,{9,12,13}},{1,5,{0,4}}}

In[39]:= **Intersection**[**tabla,lista**]
Out[39]= {3}

4.1.3. Funciones sobre listas

Mathematica nos permite aplicar funciones sobre listas, de manera que la función se aplica sobre cada elemento de una lista proporcionando otra lista de igual longitud. Veamos los siguientes ejemplos:

In[40]:= **lista={{1,2,3},0,5,-2,{Pi,-Pi}}**
Out[40]= {{1,2,3},0,5,-2,{π,$-\pi$}}

In[41]:= **lista/2**
Out[41]= $\{\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}, 0, \frac{5}{2}, -1, \{\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\}\}$

In[42]:= **Exp**[**lista**]
Out[42]= $\{\{E, E^2, E^3\}, 1, E^5, \frac{1}{E^2}, \{E^{\pi}, E^{-\pi}\}\}$

E 4.1.1 **Crea una lista cuyos elementos sean el cubo de los múltiplos de 5 que van de 0 a 100.**

E 4.1.2 **Crea, de dos formas distintas, una lista cuyos elementos sean el Seno de los ángulos de 0, 30, 60, 90, 120, 150 y 180 grados.**

E 4.1.3 **Crea una lista que contenga los números pares entre 0 y 10, y otra con los impares entre 0 y 10. A partir de ellas crea, de dos formas distintas, una lista que contenga ordenados todos los números entre 0 y 10.**

E 4.1.4 **Obtén una lista en la que aparezcan, de forma ordenada, los números comprendidos entre 0 y 50 que son a la vez múltiplos de 3 y de 4.**

E 4.1.5 **Combinando alguna de las instrucciones anteriores, construye una instrucción que calcule el máximo de una lista de números.**

4.2. Matrices y vectores

En *Mathematica*, los vectores, matrices, y tensores (arrays en general), se representan con listas. Un vector es una lista, cuyos elementos son las componentes del vector. Una matriz, es una lista de listas donde las sublistas son las filas de la matriz. De este modo, podemos definir vectores y matrices como sigue:

In[43]:= **vector={1,2,4,5,7}**;

In[44]:= **matriz={{1,2},{3,4},{5,6}}**;

Con la orden **MatrixForm**[**expr**] o **expr//MatrixForm** podemos visualizarlos de forma matemática:

In[45]:= **MatrixForm**[**matriz**]

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Con las órdenes **MatrixQ**[**expr**] y **VectorQ**[**expr**] cuestionamos si las expresiones son matrices o vectores respectivamente:

In[46]:= **VectorQ**[**vector**]

Out[46]= True

In[47]:= **MatrixQ**[**vector**]

Out[47]= False

4.2.1. Construcción

Además de definirlos directamente, podemos construir vectores y matrices simbólicos con las siguientes órdenes:

⊗ **Table[expr,{i,imin,imax},...]**

que ya la vimos para construir listas:

In[48]:= **m=Table[i*j,{i,3,4},{j,2,5}];**

MatrixForm[m]

Out[49]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 \\ 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

In[50]:= **v=Table[i,{i,0,22,3}]**
Out[50]= {0,3,6,9,12,15,18,21}

⊗ **Array[f,{n1,n2,...}]**

Construye una matriz simbólica de dimensión **n1*n2*...**

In[51]:= **vec=Array[b,5]**
Out[51]= {b[1],b[2],b[3],b[4],b[5]}

In[52]:= **mat=Array[a,{2,3}];**

MatrixForm[mat]
Out[54]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] & a[1,3] \\ a[2,1] & a[2,2] & a[2,3] \end{pmatrix}$$

¡¡Cuidado con olvidar las llaves!! Si nos las dejamos estamos generando una instrucción distinta.

⊗ **Array[f, dim, orig]**

Construye un array simbólico de tamaño **dim** que empieza en **orig**.

In[55]:= **Array[c,3,7]**

Out[55]= {c[7],c[8],c[9]}

⊗ **DiagonalMatrix[a1,a2,...]**

Obtenemos una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son **a1, a2,**...:

In[56]:= **DiagonalMatrix[{1,2,3,4}];**
MatrixForm[%][1]

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

⊗ **IdentityMatrix[n]**

Obtenemos una matriz identidad de dimensión **n*n**:

In[58]:= **IdentityMatrix[3];**
MatrixForm[%]

Out[60]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La asignación de un elemento de la matriz o vector es análoga a las listas:

In[61]:= **Clear[m];**
m=Table[N[i/j],{i,3,4},{j,2,5}];
MatrixForm[m]

Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 & 0{,}75 & 0{,}6 \\ 2. & 1{,}3333 & 1. & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

In[64]:= **m[[2,3]]**
Out[64]= 1.

In[65]:= **Part[m,2,2]**
Out[65]= 1.3333

Nota: la creación de matrices se puede hacer de forma muy sencilla utilizando el botón derecho del ratón, al hacerlo se despliega un menú en el que tenemos que elegir la orden `Create Table/Matrix/Palette` y en la ventana que aparece ir eligiendo las órdenes que nos interesan sobre el número de filas y columnas.

[1] La orden % da el último resultado que hayamos generado.

4.2.2. Operaciones

Además de las operaciones propias sobre listas, hay unas exclusivas de vectores y matrices que vemos a continuación:

- *Operaciones para Vectores:*
  - La suma y resta de vectores, se realiza de forma natural:

    In[66]:= **v1={1,3,5};**
    v2={2,4,6};

    In[68]:= **v1+v2**
    Out[68]= {3,7,11}

    In[69]:= **v1-v2**
    Out[69]= {-1,-1,-1}
  - *Mathematica* dispone de las órdenes producto escalar y vectorial.

    Dot[**a**,**b**] = **a.b**

    Realiza el producto escalar de vectores, matrices o tensores.

    In[70]:= **Dot**[**v1**,**v2**]
    Out[70]= 44

    In[71]:= **v1.v2**
    Out[71]= 44

    Cross[**a**,**b**]
    Realiza el producto vectorial de **a** por **b**.

    In[72]:= **Cross**[**v1**,**v2**]
    Out[72]= {-2,4,-2}

    Mathematica nos permite además realizar el producto componente a componente de dos vectores; para ello utilizamos la orden que habitualmente se utilizar para realizar el producto, es decir el $*$ o un espacio en blanco:

    In[73]:= **v1 v2**
    Out[73]= {2,12,30}

- *Operaciones para Matrices:*
  - **Dimensions**[**expr**]

    Devuelve la dimensión de la matriz o vector correspondiente.

In[74]:= **Dimensions**[**m**]
Out[74]= {2,4}

In[75]:= **Dimensions**[**vec**]
Out[75]= {5}

- ☐ La suma y resta entre matrices, se realiza de forma natural (siempre respetando las reglas de suma de matrices):

In[76]:= **m1={{2,0,-3},{1,1,-5}};**
m2={{-1,4,6},{-2,8,9}};

In[77]:= **MatrixForm**[**m1+m2**]

Out[77]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

In[78]:= **MatrixForm**[**m1-m2**]

Out[78]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -9 \\ 3 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

- ☐ El producto de una matriz por un escalar, se efectúa con ***** o con un blanco:

In[79]:= **MatrixForm**[**(1/2)*m2**]

Out[79]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

- ☐ El producto de una matriz por un vector, se realiza con **.** :

In[80]:= **Clear**[**v**]**;**
v={-1,7,3};
m1.v

Out[82]= {-11,-9}

- ☐ **Inverse**[**m**]

Calcula la inversa de una matriz cuadrada **m**.

In[83]:= **Clear**[**mat**]**;**
mat={{2,-1,0},{0,-1,2},{1,3,-5}};
MatrixForm[**mat**]

Out[85]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

In[86]:= **inmat=Inverse[mat];**
MatrixForm[inmat]

Out[87]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□ **Transpose[m]**

Calcula la traspuesta de la matriz **m**.

In[88]:= **trmat=Transpose[mat];**
MatrixForm[trmat]

Out[90]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

□ **Det[m]**

Calcula el determinante de la matriz.

In[91]:= **Det[mat]**

Out[91]= -4

□ **Minors[m,k]**

Proporciona una matriz con los determinantes de todas las submatrices del orden **k** especificado.

In[92]:= **Minors[mat,1]**

Out[92]={{2,-1,0},{0,-1,2},{1,3,-5}}

In[93]:= **Minors[mat,2]**

Out[93]={{-2,4,-2},{7,-10,5},{1,-2,-1}}

In[94]:= **Minors[mat,3]**

Out[94]={{-4}}

Para ver como devuelve *Mathematica* los menores de orden dos para el caso de una matriz tres por tres, podemos incluir el siguiente ejemplo:

In[95]:= **matriz={{a1,a2,a3},{a4,a5,a6},{a7,a8,a9}};**
Minors[matriz,2]

Out[96]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -(a2\,a4)+a1\,a5 & -(a3\,a4)+a1\,a6 & -(a3\,a5)+a2\,a6 \\ -(a2\,a7)+a1\,a8 & -(a3\,a7)+a1\,a9 & -(a3\,a8)+a2\,a9 \\ -(a5\,a7)+a4\,a8 & -(a6\,a7)+a4\,a9 & -(a6\,a8)+a5\,a9 \end{pmatrix}$$

□ **RowReduce[m]**

Desarrolla una eliminación gaussiana sobre la matriz **m** y proporciona la matriz reducida por filas. Si la matriz es cuadrada no singular, resultará la matriz identidad.

In[97]:= **MatrixForm[RowReduce[mat]]**

Out[97]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[98]:= **mat1={{-1,3,4,-5},{2,3,0,0},{-2,4,0,1}};**
MatrixForm[mat1]

Out[99]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[100]:= **MatrixForm[RowReduce[mat1]]**

Out[100]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{79}{56} \end{pmatrix}$$

Nota: la orden `RowReduce` no se puede utilizar directamente en el caso de matrices dependientes de parámetros ya que siempre se obtiene que la matriz tiene rango máximo sin considerar los casos que se puedan obtener.

□ **MatrixPower[m,n]**

Eleva la matriz **m** a la potencia **n**-ésima.

In[101]:= **potmat=MatrixPower[mat,3];**
MatrixForm[potmat]

Out[102]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 \\ -8 & -45 & 74 \\ 25 & 115 & -193 \end{pmatrix}$$

In[103]:= **potmat==mat.mat.mat**

Out[103]= True

Nota: No es lo mismo `mat^3` que `MatrixPower[mat,3]`.

E 4.2.1 **Dados los puntos A=(4,5,7), B=(-1,2,3) y C=(9,8,11), demuestra que están alineados.**

E 4.2.2 **Dados los puntos A=(-1,8,7), B=(4,1,5) y C=(-7,6,5), demuestra que no están alineados.**

E 4.2.3 **Determina la ecuación del plano que contiene a los vectores (1,0,1) y (0,1,1) y pasa por el origen.**

E 4.2.4 **Determina si los vectores (1,0,1,2), (1,0,0,1), (0,0,1,1) son linealmente independientes o no.**

E 4.2.5 **Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A=(-1,2,3), B=(4,1,6) y C=(2,-1,3).**

E 4.2.6 **Determina si los puntos A=(1,2,-1), B=(1,3,0), C=(0,0,1) y D=(0,2,4) son coplanarios o por el contrario forman un tetraedro.**

E 4.2.7 **Determina la posición relativa de los planos:** $\pi : 3x + 2y - 6z - 7 = 0$ **y** $\pi' : 4x - y + z + 2 = 0$.

E 4.2.8 **Determina la posición relativa de los planos:** $\pi : 2x + 3y - z + 8 = 0$ **y** $\pi' : -4x - 6y + 2z - 16 = 0$.

E 4.2.9 **Determina la posición relativa de los planos:** $\pi : 3x - y + z + 1 = 0$ **y** $\pi' : 6x - 2y + 2z - 7 = 0$.

E 4.2.10 **Dada una población de** $\overrightarrow{p}$ **individuos, se sabe que al año siguiente se tienen** $A\overrightarrow{p}$ **individuos, donde** A **es la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula la población que habrá al cabo de 20 años si la población inicial es de $\overrightarrow{p} = (10, 0, 0, 0)$ individuos.

E 4.2.11 **¿ Son ortogonales la matrices**

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \textbf{ y } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \textbf{?}$$

E 4.2.12 **¿ Es normal la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \textbf{?}$$

E 4.2.13 **Calcula el rango de la matriz**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

utilizando dos conjuntos de órdenes diferentes.

4.2.3. Cálculo de valores y vectores propios

Recordemos que, dada una matriz cuadrada A, el sistema $(A-\lambda I)x = 0$ nos proporciona los valores y vectores propios x de la matriz. Si x es vector propio de A de valor propio λ, entonces $Ax = \lambda x$. En *Mathematica*, se disponen de las siguientes órdenes relativas al cálculo de valores y vectores propios de una matriz cuadrada.

⊖ **Eigenvalues**[**mat**]

Calcula los valores propios de la matriz **mat**.

In[104]:= **Clear**[**mat**];
mat={{5,1,-1},{2,4,-2},{1,-1,3}};
MatrixForm[**mat**]

Out[106]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

In[107]:= **Eigenvalues[mat]**
Out[107]= {2,4,6}

In[108]:= **Clear[mat];**
mat={{a,0,b},{0,1,a},{0,1,0}};
MatrixForm[mat]

Out[110]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In[111]:= **Eigenvalues[mat]**
Out[111]= $\{a, \frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})\}$

A veces, la expresión de los valores propios es larga o complicada. En este caso, interesa el valor numérico:

In[112]:= **Clear[mat];**
mat={{-1,0,2},{3,5,0},{0,2,1}};

In[114]:= **N[Eigenvalues[mat]]**
Out[114]= {-0.211243+1.11638 I,-0.211243-1.11638 I,5.42249}

⊖ **Eigenvectors[mat]**

Calcula los vectores propios de la matriz **mat**. El orden de los vectores de la lista que genera, se corresponde con el orden de los valores propios correspondientes a la lista de Eigenvalues.

In[115]:= **Clear[mat];**
mat={{5,1,-1},{2,4,-2},{1,-1,3}};
Eigenvectors[mat]

Out[117]= {{0,1,1},{1,0,1},{1,1,0}}

Si tenemos valores propios repetidos y la dimensión del subespacio que generan es inferior a la multiplicidad, *Mathematica* le asocia a alguno de dichos valores el vector nulo.

In[118]:= **Clear[mat];**
mat={{1,0,0},{1,1,0},{2,3,2}};
MatrixForm[mat]

Out[120]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In[121]:= **Eigenvalues[mat]**
Out[121]= {1,1,2}

In[122]:= **Eigenvectors[mat]**
Out[122]= {{0,-1,3},{0,0,0},{0,0,1}}

⊖ **Eigensystem[mat]**

Proporciona una lista donde aparecen los valores propios en primer lugar, y los vectores propios asociados en segundo lugar.

In[123]:= **Clear[mat];**
mat={{0,0,2},{0,2,0},{2,0,0}};
MatrixForm[mat]

Out[125]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In[126]:= **Eigensystem[mat]**
Out[126]= {{-2,2,2},{{-1,0,1},{1,0,1},{0,1,0}}}

Observa que en este último caso, al valor repetido le corresponde un subespacio de dimensión la multiplicidad.

Si pedimos que el sistema formado por los valores y vectores propios sea escrito en forma de matriz obtenemos una matriz tal que en su primera fila aparecen los valores propios y en su segunda fila los vectores propios asociados a cada uno de los valores propios de la primera fila.

In[127]:= **Eigensystem[mat]**
Out[127]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ \{-1,0,1\} & \{1,0,1\} & \{0,1,0\} \end{pmatrix}$$

E 4.2.13 **Halla para la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) su polinomio característico,

b) sus valores propios, recuerda que son las raíces del polinomio característico, compruébalo,

c) una matriz P, tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal.

E 4.2.14 **Halla para la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) su polinomio característico,

b) sus valores propios,

c) un conjunto máximo de vectores propios ortogonales no nulos de A[1]**,**

d) una matriz ortogonal P, tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal.

E 4.2.15 **Halla para la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) su polinomio característico,

b) sus valores propios,

c) un conjunto máximo de vectores propios ortogonales no nulos de A. Nota: en este caso para realizar el proceso de ortogonalización debemos utilizar el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt utilizando la orden `GramSchmidt[v1,...,vn]` que genera un conjunto ortonormal de vectores; para aplicar esta orden debemos cargar el paquete `<<LinearAlgebra‘Orthogonalization‘`

d) **una matriz ortogonal P, tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal.**

E 4.2.16 **Halla para la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

a) su polinomio característico,

[1] Para normalizar los vectores obtenidos puedes utilizar el paquete << LinearAlgebra‘MatrixManipulation‘, que permite utilizar la orden **VectorNorm[N[expr], 2]** que calcula la norma 2 de **expr**

b) sus valores propios,

c) un conjunto máximo de vectores propios ortogonales no nulos de A.

d) una matriz ortogonal P, tal que $P^{-1}\,A\,P$ sea diagonal.

E 4.2.17 **¿ Es definida positiva la matriz**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

4.3. Polinomios

Para definir un polinomio, utilizamos la misma técnica que para definir funciones. Así, son polinomios:

In[128]:= **p[x_]:=1 − 2x + 3x^2 − 5x^4 + 2x^5 − x^9**

In[129]:= **q[x_, y_]=7 − 2x + 3x ∗ y + 4x^2 ∗ y − 2x ∗ y^2 + 5x^3 ∗ y^2**
Out[129]= $7 - 2x + 3xy + 4x^2y - 2xy^2 + 5x^3y^2$

Observa que *Mathematica* automáticamente ordena y agrupa en potencias crecientes de la variable:

In[130]:= **r[x_]:=x^2 + 10x^4 − 2x + 3 − 5x^2 − 6x^7 − 2 − 3x^4**
r[x]
Out[131]= $1 - 2x - 4x^2 + 7x^4 - 6x^7$

4.3.1. Órdenes sobre polinomios

⊗ **PolynomialQ[expr,{var1,var2,. . . }]**

Evalúa si se trata de un polinomio en las variables **var1,var2,. . .** o no.

In[132]:= **PolynomialQ[q[x],{x}]**
Out[132]= True

In[133]:= **PolynomialQ[E^x + x^2,{x}]**
Out[133]= False

⊗ **Variables[poly]**

Proporciona una lista de las variables independientes del polinomio.

In[134]:= **Variables[q[x]]**
Out[134]= {x}

In[135]:= **Variables[x ∗ y + 2x^2 + z ∗ x ∗ y − x^3 ∗ y^2]**
Out[135]= {x,y,z}

⊗ **Length[poly]**

Indica el número de monomios del polinomio.

In[136]:= **Length[q[x]]**
Out[136]= 5

⊗ **Exponent[poly,var]**

Proporciona el valor máximo del exponente del polinomio **poly** en la variable **var**.

In[137]:= **Exponent[q[x],x]**
Out[137]= 7

In[138]:= **Exponent[x^2 ∗ y + 3y^3 ∗ x^4 + 5 + 6y − 2y^2 ∗ x^5,y]**
Out[138]= 3

⊗ **Expand[expr]**

Desarrolla al máximo la expresión **expr**. En particular, expresa un polinomio como suma de monomios.

In[139]:= **Expand[3x^2 ∗ (x + y)^2 + 2x^2 ∗ y ∗ 2 − 5y^3 − (2 + y) ∗ (3 − x)]**
Out[139]= $-6 + 2x + 3x^4 - 3y + xy + 4x^2y + 6x^3y + 3x^2y^2 - 5y^3$

⊗ **Collect[poly,var]**

Expresa el polinomio **poly** en potencias de la variable **var**.

In[140]:= **Collect[%,y]**
Out[140]= $-6 + 2x + 3x^4 + (-3 + x + 4x^2 + 6x^3)y + 3x^2y^2 - 5y^3$

⊗ **Coefficient[poly,elem]**

Obtiene el coeficiente del elemento **elem** en el polinomio **poly**.

In[141]:= **Clear[q];**
q[x_]=Expand[(x + y)^3 − 3x ∗ y + (x − 1) ∗ (y + 3)^2]
Out[143]= $-9 + 9x + x^3 - 6y + 3xy + 3x^2y - y^2 + 4xy^2 + y^3$

In[144]:= **Coefficient[q[x],x*y]**
Out[144]= 3

4.3.2. Operaciones con polinomios

⊗ **PolynomialQuotient[p,q,var]**, **PolynomialRemainder[p,q,var]**

Obtienen el cociente y el resto respectivamente, en la variable **var**, de la división de dos polinomios **p** y **q**.

In[145]:= **Clear[p,q];**
p[x_]:=5x^5 − 3x^3 + 2x^2 − 6x + 1;
q[x_]:=2x^3 − 3x + 5;
c[x_]:= PolynomialQuotient[p[x],q[x],x]

Out[149]= $\frac{9}{4} + \frac{5x^2}{2}$

In[150]:= **r[x_]:= PolynomialRemainder[p[x],q[x],x]**
Out[150]= $-\frac{41}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{21x^2}{2}$

Comprobemos este resultado, utilizando para ello una orden nueva **Simplify[expr]** que simplifica al máximo **expr**:

In[151]:= **Simplify[p[x]==q[x]*c[x]+r[x]]**
Out[151]= True

⊗ **PolynomialLCM[poly1,poly2,. . .]**

Proporciona el mínimo común múltiplo de varios polinomios.

In[152]:= **Clear[r,c];**
r[x_]:=5x^5 − 3x^4 − 8x + 1;
c[x_]:=x^3 − 2x^2 + 3;
PolynomialLCM[p[x],q[x],r[x],c[x]]

Out[155]= $(3-2x^2+x^3)(5-3x+2x^3)(1-6x+2x^2-3x^3+5x^5)(1-8x-3x^4+5x^5)$

In[156]:= **Expand[%]**
Out[156]= $15 - 219x + 866x^2 - 578x^3 - 255x^4 + 1309x^5 - 2017x^6 + 875x^7 + 953x^8$
$-1778x^9 + 1141x^{10} - 27x^{11} - 688x^{12} + 568x^{13} - 45x^{14} - 130x^{15} + 50x^{16}$

⊗ **PolynomialGCD[poly1,poly2,. . .]**

Proporciona el máximo común divisor de varios polinomios.

In[157]:= **PolynomialGCD[p[x],q[x],r[x],c[x]]**
Out[157]= 1

4.3.3. Factorización y descomposición de polinomios

Para ello, disponemos de las siguientes órdenes:

⊙ **Factor[poly]**

Factoriza el polinomio **poly**.

In[158]:= **Clear[p]**
p[x_]:=−45 + 6x + 28x^2 + 10x^3 + x^4
Factor[p[x]]

Out[160]= $(-1+x)(3+x)^2(5+x)$

⊙ **FactorList[poly]**

Proporciona una lista de pares de elementos, siendo el primero el factor del polinomio y el segundo, su multiplicidad.

In[161]:= **FactorList[p[x]]**
Out[161]= {{1,1},{-1+x,1},{3+x,2},{5+x,1}}

⊙ **FactorTerms[poly]**

Saca factor común los elementos comunes a todos los términos del polinomio.

In[162]:= **Clear[p]**
p[x_]:=2x − 4x^4 + 6x − 12x^3;
FactorTerms[p[x]]
Out[164]= $-4(-2x+3x^3+x^4)$

E 4.3.1 **Determina, usando alguna de las instrucciones anteriores, los ceros reales del polinomio** $-\frac{157}{100}+x-\frac{157x^2}{100}+x^3$**.**

E 4.3.2 **Repite el problema escribiendo** $-1{,}57+x-1{,}57\,x^2+x^3$**. Determina gráficamente (aproximadamente) los ceros reales de este polinomio.**

E 4.3.3 **Calcula el número de monomios que tiene el polinomio que es el mínimo común múltiplo de** $p(x)=x^2+2\,x+1$ **y** $q(x)=x+2$**.**

E 4.3.4 **Comprueba, utilizando alguna de las instrucciones que aparecen en la sección 4.3, que los valores propios de la matriz del ejercicio E 4.2.13 son -2 y 5.**

4.4. Ecuaciones lineales: resolución

La orden más general para resolver ecuaciones lineales o no lineales es:

Solve[**ecuacs, variables**]

que resuelve formalmente la ecuación (o conjunto de ecuaciones) **ecuacs** en la variable (o lista de variables) hallando simbólicamente sus soluciones. Las ecuaciones deben escribirse con la expresión lógica "=="(¡Mucho cuidado con no poner simplemente "="!) y el resultado es una lista donde los elementos son, a su vez, listas de soluciones en términos de asociaciones como $\{x \to \text{sol}\}$, para una variable, o $\{x \to \text{solx}, y \to \text{soly}, ...\}$ para varias variables. Por ejemplo, para una ecuación lineal:

In[165]:= **Solve**[**3x+2==4,x**]
Out[165]= $\{\{x \to \frac{2}{3}\}\}$

y para un sistema lineal,

In[166]:= **Clear**[**x**];
Solve[**{2x-3y+z,3x-3y,x+y+z}=={1,2,3},{x,y,z}**]
Out[167]= $\{\{x \to \frac{14}{9}, y \to \frac{8}{9}, x \to \frac{5}{9}\}\}$

o bien,

In[168]:= **Clear**[**x,y,z**];
Solve[**{2x-3y+z == 1,3x-3 y== 2,x+y+z == 3},{x,y,z}**]
Out[169]= $\{\{x \to \frac{14}{9}, y \to \frac{8}{9}, x \to \frac{5}{9}\}\}$

A la hora de resolver sistemas de ecuaciones debemos tener en cuenta que la orden **Solve** sólo resuelve de manera óptima sistemas de ecuaciones que poseen una única solución, es decir, sistemas compatibles y determinados. Antes de profundizar en la resolución de sistemas de ecuaciones debemos recordar que:

- un sistema de ecuaciones se dice Compatible y Determinado si posee una única solución. En este caso el rango de la matriz A del sistema es el mismo que el de la matriz ampliada Ab e igual al número de incógnitas.

- Un sistema de ecuaciones se dice Compatible e Indeterminado si posee más de una solución. Esto sucede cuando el rango de la matriz A es el mismo que el de la matriz ampliada Ab pero menor que el número de incógnitas. En este caso el sistema posee infinitas soluciones que dependen de $n - r$ parámetros, siendo n el número de incógnitas y r el rango de las matrices A y Ab.

- Un sistema de ecuaciones se dice Incompatible si no tiene solución. En este caso el rango de la matriz A es menor que el de la matriz ampliada Ab.

La orden **Solve** proporciona únicamente las soluciones en términos de asociaciones, una lista de una lista, en el caso de problemas lineales y lista encadenada a más de una lista en el caso de problemas no lineales. Para acceder a las soluciones, tenemos la opción de formar una única lista de soluciones en una variable, o una lista de listas de soluciones en el caso de más de una variable, eliminando las asignaciones de tipo $x \to *, y \to *, ...$ Esto, se realiza con la instrucción, que ya vimos en el capítulo anterior **exp /. regla** que aplica la regla o lista de reglas a la expresión de la izquierda. Por ejemplo

In[170]:= **Clear**[**x**];
x+3 /. x → 2
Out[171]= 5

(Recuerda que con $x \to 2$ no asignamos a x el valor 2, simplemente indicamos que queremos obtener la expresión $x + 3$ para x igual a 2).

Bien, en el caso que nos ocupa, escribimos:

var /. Solve[**ecuacs, variables**]

donde **var** representa la variable o la lista de variables de la que queremos extraer las soluciones. Así, en los ejemplos anteriores, quedaría:

In[172]:= **Clear**[**x,y,z**];
x /. Solve[**3x+2==4,x**]
Out[173]= $\{\frac{2}{3}\}$

In[174]:= **Clear**[**x,y,z**];
z /. Solve[**{2x-3y+z == 1,3x-3 == 2,x+y+z == 3},{x,y,z}**]
Out[175]= $\{\frac{5}{12}\}$

que son listas simples, y,

In[176]:= **Clear**[**x,y,z**];
{x,z} /. Solve[**{2x-3y+z == 1,3x-3 == 2,x+y+z == 3},{x,y,z}**]
Out[177]= $\{\{\frac{5}{3}, \frac{5}{12}\}\}$

In[178]:= **Clear**[**x,y,z**];
{x,y,z} /. Solve[**{2x-3y+z == 1,3x-3 == 2,x+y+z == 3},{x,y,z}**]
Out[179]= $\{\{\frac{5}{3}, \frac{11}{12}, \frac{5}{12}\}\}$

que son listas encadenadas.

Finalmente, para obtener un valor concreto, es decir, asignar a la variable el valor de la solución, manipulamos igual que en las listas y seleccionamos el elemento deseado:

In[180]:= **Clear**[**x,y,z**];
solz=z /. Solve[**{2x-3y+z == 1,3x-3 == 2,x+y+z == 3},{x,y,z}**];
z=solz[[**1**]]
Out[182]= $\frac{5}{12}$

que es el valor que toma la variable z hasta que no se vacíe su contenido.

Mathematica nos proporciona además una orden bien sencilla para resolver exclusivamente sistemas de ecuaciones lineales:

LinearSolve[**M,b**]

que resuelve un sistema de la forma $M\,x = b$; para ello introducimos la matriz del sistema (matriz de coeficientes) y el vector de términos independientes, el resultado es un vector solución.

In[183]:= **Clear**[**A,b,x**];
A={{-1,3},{3,-4}};
b={2,5};
s=LinearSolve[**A,b**]
Out[186]= $\{\frac{23}{5}, \frac{11}{5}\}$

Comprobemos este resultado:

In[187]:= **A.s==b**
Out[187]= True

Otra forma de resolver el sistema anterior es invirtiendo la matriz y multiplicando por el vector:

In[188]:= **Inverse**[**A**]**.b**
Out[188]= $\{\frac{23}{5}, \frac{11}{5}\}$

En el caso de que el sistema sea indeterminado, *Mathematica* proporciona una de las soluciones. Para comprobar si es indeterminado, podemos utilizar

NullSpace[**m**]

que nos proporcionaba una base del núcleo de la matriz (y que será el vector cero si el sistema sólo tiene una solución).

In[189]:= **Clear**[**A,b,x**];
A={{2,1,0},{1,1,-2},{3,1,2}};
b={1,1,1};
s=LinearSolve[**A,b**]
Out[192]= {0,1,0}

In[193]:= **NullSpace**[**A**]
Out[193]= {{-2,4,1}}

Esto nos indica que las soluciones del sistema se pueden escribir en la forma: $\{x, y, z\} = \{0, 1, 0\} + \lambda\{-2, 4, 1\}$

En el caso de que el sistema sea incompatible, *Mathematica* indica que no hay solución al sistema.

In[194]:= **Clear**[**A,b,x**];
A={{-2,1,1},{1,-2,1},{1,1,-2}};
b={1,1,1};
s=LinearSolve[**A,b**]
`LinearSolve::nosol:`
`Linear equation encountered which has no solution.`
Out[197]= LinearSolve[{{-2,1,1},{1,-2,1},{1,1,-2}},{1,1,1}]

Como hemos podido comprobar hasta ahora, resolver sistemas de ecuaciones con *Mathematica* es realmente sencillo. Sin embargo, cuando intentamos resolver sistemas de ecuaciones dependientes de uno o varios parámetros debemos tener más cuidado. *Mathematica* no ofrece ninguna orden específica para resolver este tipo de sistemas, sino que debemos utilizar algunos de los trucos que hasta ahora hemos introducido. Veamos una forma de resolver con *Mathematica* el siguiente sistema de ecuaciones dependientes de un parámetro

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (a+1)\,x & + & y & + & z & = & a+1 \\ x & + & (a+1)\,y & + & z & = & a+3 \\ x & + & y & + & (a+1)\,z & = & -2\,a-4 \end{array}\right.$$

Cuando resolvemos un sistema como el anterior podemos ver como *Mathematica* nos devuelve siempre una solución; concretamente si utilizamos la orden **Solve** obtenemos:

$$\{\{x \to -\frac{-1-a}{a}, y \to -\frac{-3-a}{a}, z \to -\frac{2\,(2+a)}{a}\}\}$$

pero debemos tener en cuenta que esta solución solamente es válida en el caso en el que el sistema sea Compatible y Determinado, es decir, en aquellos casos en los que el valor del determinante de la matriz A sea distinto de cero.

Cuando estamos estudiando sistemas dependientes de un parámetro debemos calcular en primer lugar los valores que hacen cero el determinante de la matriz A, en este caso los valores que hacen 0 el determinante son: $a = -3$ y $a = 0$, y a continuación estudiar cada uno de los sistemas que resultan para cada uno de los valores particulares.

En este caso podemos deducir que:

- si $a \neq -3$ y $a \neq 0$ el sistema es compatible y determinado por lo que va a tener una única solución, que es la que hemos obtenido anteriormente.
- si $a = 0$ el sistema es incompatible, ya que el rango de A es uno y el de Ab es 2, por lo tanto no existe solución. Recuerda la orden que vimos en el tema anterior para calcular rangos.
- si $a = -3$ el sistema es compatible e indeterminado, ya que el rango de A y el de Ab coinciden. En ambos casos el rango es 2, menor que el número de incógnitas que es 3, por lo que las infinitas soluciones dependen de 1 parámetro. Si el sistema resultante lo resolvemos usando **Solve** obtenemos:

$$\{\{x \to \frac{4}{3} + z, y \to \frac{2}{3} + z\}\}$$

Si lo resolvemos utilizando **LinearSolve** obtenemos sólo una solución dentro de todo el conjunto posible, esta solución es $\{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0\}$. Tal y como hemos visto anteriormente, en este caso para obtener todo el conjunto de soluciones también debemos utilizar la orden **NullSpace**, que en este caso da como solución: $\{\{1, 1, 1\}\}$, lo que nos permite deducir que la solución del sistema es $(x, y, z) = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0) + (1, 1, 1)z = (\frac{4}{3} + z, \frac{2}{3} + z, z)$

Un caso algo más complicado de resolver son los sistemas de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro con distinto número de ecuaciones que de incógnitas. En algunos casos, $(m = n + 1)$, para resolver este tipo de sistemas, es suficiente con razonar sobre la estructura de estos sistemas. Así por ejemplo para el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & -1 \\ & & y & + & 2z & = & 9 \\ x & - & y & + & z & = & 7 \\ ax & - & 3y & - & z & = & 1. \end{array}\right.$$

debemos calcular en primer lugar los valores para los que se anula el determinante de la matriz ampliada Ab, ya que son los únicos que tal vez nos den una solución al sistema. Así, en este caso, el determinante de Ab se anula para $a = 5$. Por lo tanto podemos deducir que:

- si $a \neq 5$ el rango de Ab es el máximo posible, es decir, 4, mientras que el rango de A será como máximo 3, ya que es una matriz 4×3. Por lo tanto, en este caso tenemos un sistema incompatible y no va a tener solución.

- Si $a = 5$ el rango de A y el de Ab son el mismo, concretamente 3. Por lo tanto, en este caso tenemos un sistema compatible y determinado, que va a tener una única solución que va a ser:
$$\{\{x \to \frac{2}{5}, y \to -\frac{7}{5}, z \to \frac{26}{5}\}\}$$

Como estamos viendo hasta este momento, la resolución de sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro es muy complicada, no obstante *Mathematica* nos permite resolver estos sistemas de forma realmente sencilla, para ello tiene definida una función que permite calcular las soluciones de los sistemas de forma sencilla, es la orden

Reduce[ecuaciones, variables]

así para el caso del sistema que hemos visto anteriormente (aprovecharemos la ocasión para ver otra estructura que nos permite resolver los sistemas de manera muy clara):

In[198]:= **Clear[A,b,a,X,x,y,z]**
A={{a+1,1,1},{1,a+1,1},{1,1,a+1}};
b={a+1,a+3,-2a-4};
X={x,y,z};
Reduce[A.X==b,X]

In[202]:= $a == -3 \quad \&\& \quad x == \frac{1}{3}(4+3z) \quad \&\& \quad y == \frac{1}{3}(2+3z) \quad || \quad x == \frac{1+a}{a} \quad \&\& \quad y == \frac{3+a}{a} \quad \&\& \quad z == -\frac{2(2+a)}{a} \quad \&\& \quad a \neq 0 \quad \&\& \quad 3+a \neq 0$

E 4.4.1 **Determina la inversibilidad de la matriz**
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
según los valores de a.

E 4.4.2 **Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro k:**
$$\left.\begin{array}{rcl} x + ky - kz & = & 0 \\ 12x - (k+2)y - 2z & = & 0 \\ kx - 2y + z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

E 4.4.3 **Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores del parámetro m:**
$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y & = & m \\ mx + 3y & = & 4 \\ 3x - y & = & 2 \end{array}\right\}.$$

4.5. Ecuaciones no lineales

La resolución de ecuaciones no lineales es un problema habitual en los distintos campos de la ciencia y de la técnica. En general, no existen métodos de resolución formal de ecuaciones no lineales, tan sólo para polinomios de grado menor que cinco. Por este motivo, hay que desarrollar métodos numéricos que proporcionan soluciones aproximadas a nuestro problema no lineal. En esta sección, analizamos la resolución general de problemas no lineales con las órdenes que nos proporciona *Mathematica* tanto en el caso de obtención de soluciones exactas, como en el caso de soluciones aproximadas.

4.5.1. Resolución formal o exacta

Las órdenes que incorpora *Mathematica* para resolver ecuaciones no lineales, son las siguientes:

- **Solve**[**ecuac, variable**]

  que ya la hemos descrito en la sección anterior y recordemos que resuelve formalmente la ecuación **ecuac** en la variable o lista de variables dada hallando simbólicamente sus soluciones. Por ejemplo,

  In[203]:= **Clear**[**p,sol**]
  p[**x_**]**:=3x^3 − 2x + 1**;
  sol=Solve[**p**[**x**]**==0, x**]

  Out[205]= $\left\{\{x \to -1\}, \{x \to \frac{1}{6}(3 - I\sqrt{3})\}, \{x \to \frac{1}{6}(3 + I\sqrt{3})\}\right\}$

  Como ya hemos visto, obtenemos una lista de listas, cada sublista representa una solución en la variable o variables de la ecuación. Para formar una lista simple, y aislar todas las soluciones en una variable dada, recordemos la siguiente instrucción:

  In[206]:= **sol = x /. sol**
  Out[206]= $\{-1, \frac{1}{6}(3 - I\sqrt{3}), \frac{1}{6}(3 + I\sqrt{3})\}$

  De esta manera, almacenamos en **sol** una nueva lista de soluciones (es habitual en programación el modificar una variable y darle el mismo nombre). Así, en sol[[i]], $i = 1, 2, 3$ tenemos las soluciones al problema cúbico anterior. Por ejemplo, para comprobar que efectivamente son soluciones podemos sustituir éstas en el polinomio:

  In[207]:= **N**[**p**[**sol**[[**1**]]]]
  Out[207]= 0.

análogamente haríamos con el resto de las variables. En el caso en el que deseemos resolver un sistema de ecuaciones, podemos realizar el proceso siguiente:

In[208]:= **Clear[x,y,sol];**
sol = Solve[{y^2-2x^2==4,x+y == 0},{x,y}]
Out[209]= $\{\{x \to -2I, y \to 2I\}, \{x \to 2I, y \to -2I\}\}$

Así, para obtener las soluciones a las variables, formamos las siguientes listas,

In[210]:= **solx = x /. sol**
Out[210]= $\{-2I, 2I\}$

In[211]:= **soly = y /. sol**
Out[211]= $\{2I, -2I\}$

y, por ejemplo, una comprobación será:

In[212]:= **{y^2-2x^2,x+y}=={4,0} /.{x → solx[[1]],y → soly[[1]]}**
Out[212]= True

(igualmente se obtendría con el resto de componentes de solx y soly.)

Como se ha mencionado, la orden **Solve** obtiene soluciones de forma simbólica. En efecto,

In[213]:= **Clear[p, b, x]**
p[x_]:=x^3 − x^2 − b x;
Solve[p[x]==0, x]
Out[215]= $\left\{\{x \to 0\}, \{x \to \frac{1}{2}(1 - I\sqrt{1+4b})\}, \{x \to \frac{1}{2}(1 + I\sqrt{1+4b})\}\right\}$

que, para un valor particular del parámetro:

In[216]:= **% /. b → 2**
Out[216]= $\{\{x \to 0\}, \{x \to -1\}, \{x \to 2\}\}$

Habitualmente, cuando se trata de resolver ecuaciones lineales no polinómicas, el comando **Solve** no siempre obtiene como resultado todas las soluciones, sino tan sólo un conjunto de ellas.

In[217]:= **Solve[Exp[x]*Cos[x]==0,x]**

```
Solve:: ifun: Inverse functions are being used by  Solve,
so some solutions may not be found.
```

Out[217]= $\left\{\{x \to -\frac{\pi}{2}\}, \{x \to \frac{\pi}{2}\}, \{x \to -\infty\}\right\}$

- **Reduce**[**ecuac, variable**]

  Que, como ya hemos visto anteriormente, reduce la ecuación **ecuac** a un conjunto de ecuaciones más sencillas que tienen las mismas soluciones que la ecuación de partida. Por ejemplo,

  In[218]:= **Reduce**[**x^3+2x^2-1==0,x**]
  Out[218]= $x == -1 \,||\, x == \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \,||\, x == \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$

  In[219]:= **Reduce**[**Exp**[**x**]**==0,x**]

  ```
  Reduce:: ifun:    Inverse functions are being used by
   Reduce, some solutions may not be found.
  ```

  Out[219]= x==$-\infty$

  Una ventaja del comando **Reduce** sobre **Solve**, es que este primero, reconoce además diferentes soluciones en casos de ecuaciones dependientes de un parámetro, como vemos en el siguiente ejemplo:

  In[220]:= **Reduce**[**b x==0,x**]
  Out[220]= b == 0 $||$ x == 0

  mientras que con Solve,

  In[221]:= **Solve**[**b x == 0,x**]
  Out[221]= $\{\{x \to 0\}\}$

- **Roots**[**polinomica, variable**]

  Resuelve ecuaciones polinómicas (exclusivamente). El resultado es una relación lógica entre las soluciones. Por ejemplo,

  In[222]:= **Roots**[**x^2-2x -1==0,x**]
  Out[222]= $x == 1-\sqrt{2} \,||\, x == 1+\sqrt{2}$

4.5.2. Resolución aproximada

En numerosas ocasiones, no es posible encontrar una solución exacta a nuestra ecuación, pero sí que podemos encontrar soluciones aproximadas. *Mathematica* incorpora dos comandos de aproximación numérica de soluciones. Otra posibilidad es utilizar métodos numéricos como puede ser el método de Bisección o el Newton Raphson. En este apartado, veremos el cálculo de soluciones de ecuaciones no lineales utilizando los comandos que nos proporciona *Mathematica* y dejaremos los métodos de aproximación para cursos más avanzados, puesto que requieren ya un nivel básico de programación.

Además, debemos tener en cuenta que en el caso de ecuaciones polinómicas, siempre encontraremos numéricamente todas las soluciones y utilizaremos la orden **NSolve**. Sin embargo, en el caso de una ecuación no polinómica no siempre es posible, por lo que deberemos utilizar métodos numéricos para localizar cada solución, utilizando en este caso la orden **FindRoot**.

⊙ **NSolve[ecuacion, variable, n]**[1]

Resuelve numéricamente la ecuación polinomial. Obtiene el conjunto de todas las soluciones aproximadas con n dígitos de precisión (este último parámetro es opcional). Por ejemplo,

In[223]:= **NSolve[x^5-2x^3 + 3==0,x]**
Out[223]= $\{\{x \to -1{,}63791\}, \{x \to -0{,}424835 - 0{,}930891 I\}, \{x \to -0{,}424835 + 0{,}930891 I\}, \{x \to 1{,}24379 - 0{,}449783 I\}, \{x \to 1{,}24379 + 0{,}449783 I\}\}$

In[224]:= **NSolve[x^3-1==0,x,20]**
Out[224]= $\{\{x \to -0{,}50000000000000000000 - 0{,}86602540378443864676 I\}, \{x \to -0{,}50000000000000000000 + 0{,}86602540378443864676 I\}, \{x \to 1{,}0000000000000000000\}\}$

Sin embargo, esta orden no es válida en el caso de una ecuación no polinomial, en efecto, produce el siguiente resultado:

In[225]:= **NSolve[x^4+ Sin[x]- 1==0,x]**
Solve:: tdep :
```
The equations appear to involve transcendental functions
of the variables in an essentially non-algebraic way.
```
Out[225]= NSolve[x^4+ Sin[x]- 1==0,x]

En este caso, necesitamos un método iterativo para resolver el problema no lineal. *Mathematica* nos proporciona la siguiente orden,

[1] No se obtiene el mismo resultado utilizando la combinación de órdenes **N[Solve[ec,var]]**

⊙ **FindRoot**[**ecuacion, {variable,inic,min,max}**]

Resuelve la ecuación no lineal aplicando el método iterativo de Newton o similar (Secante,...). Para ello, inicia el método en el punto inicial **inic** con objeto de obtener solución aproximada dentro del rango **(min, max)** (este último opcional). Obviamente, el problema aquí está en acertar con el valor inicial del método iterativo, porque según sea éste llegaremos a la solución si la hay o bien el método divergerá. Por ello, se hace conveniente aplicar alguna técnica para encontrar un valor inicial adecuado, por ejemplo, con el Teorema de Bolzano, si la función es continua, sabemos que entre un valor positivo y un valor negativo hay al menos una solución, por lo que podemos intentar acotar un intervalo lo más pequeño posible donde sepamos que hay solución y tomar en dicho intervalo el valor inicial. Otra posibilidad, con la orden Plot, es dibujar una gráfica y ver en qué zona hay solución. Veamos por ejemplo cómo resolvemos el siguiente problema no lineal con una ecuación no polinómica. Inicialmente, introducimos un valor inicial arbitrario,

In[226]:= **FindRoot**[**x^4+ Sin**[**x**]**- 1==0,{x,-100}**]

```
FindRoot:: cvnwt: Newton's method failed to converge
to the prescribed accuracy  after 15 iterations.
```

Out[226]= $\{x \to -1{,}45752\}$

es decir, el método no converge y nos proporciona un valor, pero que no es la solución correcta[1]. Por ello, se hace necesario un análisis de la función. Utilizando el teorema de Bolzano, analizamos dónde hay soluciones. Para ello, definimos la función y la evaluamos en diferentes puntos formando una lista con dichos valores,

In[227]:= **f**[**x_**]**:=x^4+ Sin**[**x**]**- 1;**
{N[**f**[**-2**]], **N**[**f**[**0**]], **N**[**f**[**1**]]**}**
Out[228]= $\{14{,}0907, -1., 0{,}841471\}$

por lo que deducimos que, al menos hay una solución entre -2 y 0 y otra entre 0 y 1. Veamos que, con este paso previo, ya podemos encontrar ambas soluciones:

In[229]:= **FindRoot**[**x^4+ Sin**[**x**]**- 1==0,{x,-1.5}**]
Out[229]= $\{x \to -1{,}1777\}$

y la otra solución

In[230]:= **FindRoot**[**x^4+ Sin**[**x**]**- 1==0,{x,1}**]

Out[230]= $\{x \to 0{,}750807\}$

[1]Es importante tener en cuenta el mensaje que aparece en pantalla.

que en este caso son las únicas ya que la función no cambia de signo y tiende a infinito cuando x va a $\pm\infty$.

Para finalizar, resolvemos otro problema no lineal buscando gráficamente el punto inicial para el método de Newton. Se trata de encontrar la solución de $f(x) = 0$, donde f representa una función no lineal.

In[231]:= **Clear**[**f**]
f[**x_**] **:= E^(3x) -2 x^2+ 3**
Out[232]= $3 + E^{3x} - 2x^2$

que es una función continua, si analizamos el crecimiento con su derivada:

In[233]:= **f′**[**x**]
Out[233]= $3E^{(3x)} - 4x$

que es siempre positiva. Por tanto, la función es siempre creciente y de tener raíz, tan sólo tendrá una. Veamos si tiene alguna raíz. Si analizamos el valor en dos puntos reales arbitrarios,

In[234]:= **{N**[**f**[**-100**]],**N**[**f**[**100**]]**}**
Out[234]= $\{-19997., 1{,}94243 \times 10^{130}\}$

por lo que tiene una raíz. Si acotamos más este intervalo,

In[235]:= **{N**[**f**[**-2**]],**N**[**f**[**0**]]**}**
Out[235]= $\{-4{,}99752, 4.\}$

luego la raíz está entre -2 y 0. Al realizar la gráfica se aprecia que la solución está entre -1.5 y -1. Utilizando finalmente el método iterativo con un valor inicial en dicho intervalo, obtenemos la solución final:

In[236]:= **FindRoot**[**f**[**x**]**==0,{x,-1.3}**]
Out[236]= $\{x \to -1{,}22983\}$

E 4.5.1 **Demuestra que la ecuación**

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0,$$

tiene cuatro raíces reales y calcúlalas.

E 4.5.2 **Demuestra que la ecuación**

$$x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

tiene una raíz real y calcúlala.

E 4.5.3 **Dada la función:**

$$f(x, y) = \left(\frac{1+x}{-1+y}, 2 - 3y + y^2 \right).$$

Calcula el valor de (x, y) **tal que** $f(x, y) = (0, 0)$ **y comprueba la solución obtenida.**

E 4.5.4 **Para la función:**

$$f(x, y) = (1 + 2ay - x, 9 + 2x - y), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Calcula el valor de (x, y) **tal que** $f(x, y) = (0, 0)$**. Obtén la solución para el caso particular** $a = 1$**.**

E 4.5.5 **Comprueba que la función**

$$g(x) = e^x - 3x,$$

se anula en dos puntos de la recta real. Calcula dichas raíces y dibuja el resultado mostrando los puntos de corte.

E 4.5.6 **Calcula todas las soluciones de la siguiente ecuación:**

$$x^3 = 10 \operatorname{sen}(x).$$

E 4.5.7 **Calcula todas las soluciones de la siguiente ecuación:**

$$x = \cos(x).$$

E 4.5.8 **Divide el número 8 en dos sumandos tales que la suma de sus cubos sea lo menor posible.**

E 4.5.9 **Determina** $x > 0$ **tal que** $x + \dfrac{1}{x}$ **sea mínimo.**

E 4.5.10 **Divide el número 36 en dos factores de tal forma que la suma de sus cuadrados sea lo menor posible.**

4.6. Inecuaciones

En muchas ocasiones nos aparecerá en matemáticas la necesidad de resolver inecuaciones, por ejemplo: cálculo de dominios de funciones, cálculo de zonas de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad,... La resolución de inecuaciones con *Mathematica* es muy sencilla, para ello se utiliza la orden **InequalitySolve[expr, var]**, que descompone la expresión **expr** en expresiones más sencillas que nos permiten deducir fácilmente las soluciones

Antes de utilizar esta orden debemos cargar el paquete correspondiente:

In[237]:= **≪Algebra‘InequalitySolve‘**

In[238]:= **InequalitySolve[4 + 3 x + x^2 > 0,x]**
Out[238]= $x < -4 || x > 1$

de donde fácilmente se deduce que $4 + 3\,x + x^2$ es estrictamente positivo en $(-\infty, -4) \cup (1, \infty)$.

E 4.6.1 **Calcula los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (x-3)^5 + 8$.**

E 4.6.2 **Dibuja la función**

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+2)^2}$$

en el intervalo [-5,5]. Además haz un estudio detallado del dominio, cortes con los ejes, asíntotas, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión, concavidad y convexidad y comprueba que los resultados que se obtienen coinciden con los resultados gráficos que te ofrece *Mathematica*.

E 4.6.3 **Halla un polinomio cúbico con un máximo relativo en $(3, 3)$, un mínimo relativo en $(5, 1)$ y un punto de inflexión en $(4, 2)$.**

E 4.6.4 **Representa las siguientes funciones con *Mathematica* y comprueba que los resultados que obtienes son los que deben ser haciendo un estudio detallado de los puntos de corte, asíntotas, extremos, zonas de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad y de convexidad:**

a) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{2\,x}\right)$.

b) $f(x) = x^4 - 2\,x^2$.

Ejercicios de ecuaciones (extra)

1. **Calcula la solución de las ecuaciones**

   - $5\,x + 3 = 2$
   - $2\,x = 2$
   - $a\,x + b = 0$
   - $\dfrac{3-x}{4} + \dfrac{-1+x}{5} + \dfrac{x}{6} = 0$

2. **Calcula las soluciones de las ecuaciones**

   - $x^2 - 5\,x + 6 = 0$
   - $x^4 + 7\,x^3 + 13\,x^2 - 3\,x - 18 = 0$
   - $x^3 - 5x - 4 = 0$

3. **Calcula las soluciones de la ecuación $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. ¿Qué sucede si $a = 0$ y $b \neq 0$? ¿Y si $a = 0$ y $b = 0$?**

4. **Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones de dos formas distintas.**

   - $x^3 - 5x - 4 = 0$
   - $x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$
   - $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
   - $x^5 - 3x^2 - x + 1 = 0$

5. **Calcula de dos formas distintas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones**

   - $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & 3\,y & + & 4\,z & = & 3 \\ -x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & -2 \\ 4\,x & - & 3\,y & - & z & = & 0. \end{array}\right.$

- $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 10 \\ 4\,x & - & y & + & z & = & 4 \\ -2\,x & + & y & + & z & = & -2 \\ -x & - & 3\,y & & & = & -11. \end{array}\right.$$
- $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 3. \end{array}\right.$$
- $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & = & 2. \end{array}\right.$$

6. **Calcula dependiendo del valor del parámetro a las soluciones del sistema de ecuaciones**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & -1 \\ & & y & + & 2\,z & = & 9 \\ x & - & y & + & z & = & 7 \\ a\,x & - & 3\,y & - & z & = & 1. \end{array}\right.$$

7. **Calcula dependiendo del valor de los parámetros a y b las soluciones del sistema de ecuaciones**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 3\,a\,z & = & 0 \\ 2\,x & - & 5\,y & + & b\,z & = & 0 \\ x & + & 2\,y & + & 12\,z & = & 0 \end{array}\right.$$

8. **¿Para qué valores de b tiene dos soluciones reales y distintas la ecuación $2\,x^2 + b\,x + 2 = 0$?**

9. **Halla de dos formas distintas las soluciones de la siguiente ecuación: $2\,x^4 - 11\,x^3 + 10\,x^2 + 13\,x - 10 = 0$.**

10. **Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & 9 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 2\,x_4 & = & 5 \\ x_1 & & & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$b)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & 3\,z & + & 2\,t & = & 0 \\ -2\,x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & + & t & = & 0 \\ 2\,x & + & y & + & 2\,z & + & 2\,t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & - & z & - & 2t & + & 3u & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2z & + & 3t & - & 2u & = & 0 \\ 2x & - & y & - & z & + & t & + & u & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 2z & - & t & - & 2u & = & 0. \end{array}\right.$$

11. **Discute y resuelve, según el valor de los parámetros que aparezcan, los siguientes sistemas de ecuaciones:**

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & az & = & 4 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & (a-1)z & = & a-1 \\ ax & & & - & z & = & 0 \\ ax & & & - & az & = & 1-a \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & + & az & = & 0 \\ x & + & ay & & & = & 0 \\ 2x & & & + & az & = & 0 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & & & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & + & y & - & az & = & 3 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 0 \\ 17x & - & 2y & + & 2bz & = & 0 \end{array}\right. \qquad f)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ 3x & - & 3y & + & 4z & = & 7 \\ 5x & - & (a+1)y & + & 7z & = & 8+a \end{array}\right.$$

$$g)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & - & 4z & = & a \\ & & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \qquad h)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ ax & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2bx & + & y & + & 7z & = & 0. \end{array}\right.$$

12. **Determina el valor de a para que el sistema homogéneo**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & 13y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

tenga soluciones distintas de la (0,0,0) y resuélvelo para dicho valor.

13. **Prueba que el sistema**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

tiene solución única y calcula dicha solución en función de los parámetros α, β y γ.

Capítulo 5
Gráficos

5.1. Introducción

En este capítulo nos vamos a centrar en la realización de gráficos. Ésta es una de las utilidades más visuales de *Mathematica* 4.1. Dibujar gráficas de funciones es, muchas veces, muy complicado, ya que debemos calcular máximos, mínimos, crecimiento, decrecimiento,... lo que conlleva muchas operaciones en ocasiones muy complejas. En este capítulo veremos que realizar gráficas con *Mathematica* es muy sencillo para la mayor parte de las funciones que nos planteemos.

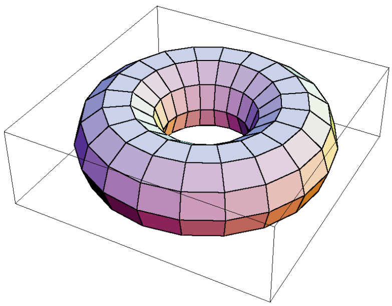


Figura 5.1: Un toro en tres dimensiones

5.2. Gráficos de funciones en dos y tres dimensiones

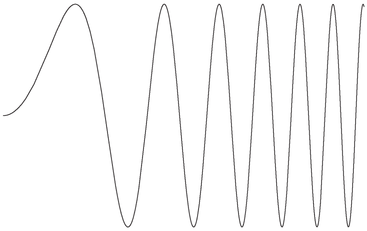
5.2.1. En dos dimensiones

En el Capítulo 3 vimos una sencilla orden para dibujar gráficas de funciones en dos dimensiones, la orden **Plot**[**{**f_1,...,f_n**}**,**{x,xmin,xmax}**]. Esta orden se puede ir ampliando y así obtener mejores resultados.

◇ **Axes** → **False**

Esta orden hace que no aparezcan ejes cuando dibujamos una función (la orden por defecto es True).

In[1]:= **Plot**[**{Sin**[x^2]**}**, **{x, 0, 2** π**}**, **Axes** → **False**]



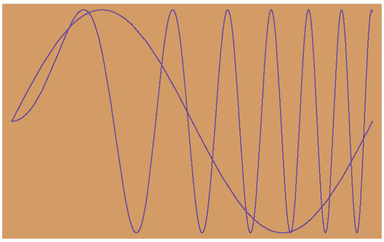
Out[1]= - Graphics-

El mismo resultado podemos obtener si utilizamos la orden **Axes** → **None**.

◇ **Background** → **RGBColor**[n_1, n_2, n_3]

Mathematica también nos permite la posibilidad de dibujar gráficas con colores. Una de las posibilidades que nos ofrece es pintar el color de fondo de la gráfica, para ello debemos añadir la orden **Background** → **RGBColor**[n_1, n_2, n_3] donde $n_i \in [0, 1]$ para $i = 1, 2, 3$. El número n_1 indica la cantidad de color rojo, el número n_2 indica la cantidad de color verde y el número n_3 indica la cantidad de color azul que vamos a mezclar para obtener el color de fondo que deseamos. Así por ejemplo, si quisieramos obtener una gráfica con un fondo de color marrón podríamos elegir (entre otras) la siguiente combinación:

In[2]:= **Plot**[**{Sin**[**x**], **Sin**[x^2]**}**, **{x, 0, 2** π**}**, **Axes** → **False**, **Background** → **RGBColor**[**0.8, 0.5, 0.3**]]

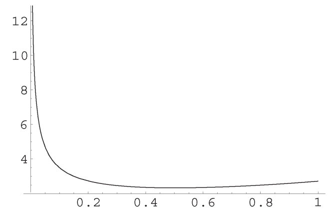


Out[2]= - Graphics-

◇ **PlotRange → All**

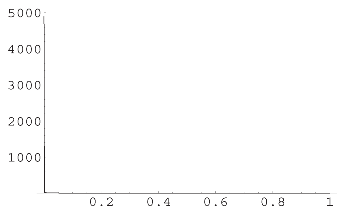
Esta orden permite dibujar todo el rango de variación de la variable, en el caso en el que no la incluyamos *Mathematica* dibuja el rango de variación que considera interesante.

In[3]:= **Plot**[$\frac{E^x}{\sqrt{x}}$, **{x, 0, 1}**]



Out[3]= - Graphics-

In[4]:= **Plot**[$\frac{E^x}{\sqrt{x}}$, **{x, 0, 1},PlotRange → All**]

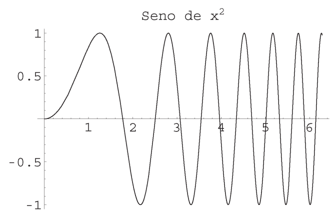


Out[4]= - Graphics-

◇ **PlotLabel** → título de la gráfica

Esta opción nos permite poner un nombre a la gráfica, lo que en ocasiones nos será de utilidad.

In[5]:= **Plot**[$Sin[x^2]$, **{x, 0, 2 π},PlotLabel →** "Seno de x^2"]

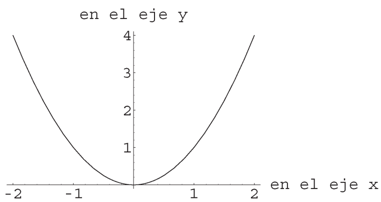


Out[5]= - Graphics-

◇ **AxesLabel** → {título del eje x, título del eje y }

Esta opción permite poner un nombre al eje de la gráfica.[1]

In[6]:= **Plot**[x^2, **{x, -2, 2 },AxesLabel** → {"en el eje x","en el eje y"}]

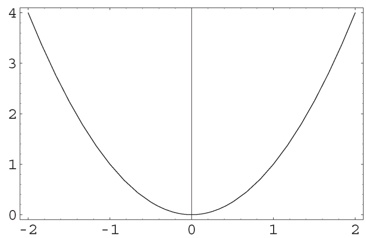


Out[6]= - Graphics-

◇ **Frame** → **True**

Esta opción permite dibujar una caja que rodee a la gráfica que vamos a realizar.

In[7]:= **Plot**[x^2, **{x, -2, 2 },Frame** → **True**]



Out[7]= - Graphics-

◇ **FrameLabel** → **{abajo, izquierda, arriba, derecha}**

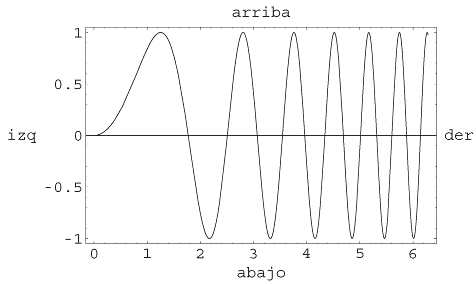
Esta orden permite colocar nombres en cada uno de los lados de la caja que hemos dibujado. Al usar esta orden se debe tener en cuenta que *Mathematica* asigna los nombres a los lados de la caja en el orden en el que se lo indicamos, es decir, en primer lugar abajo, el siguiente a la izquierda, luego arriba y para terminar en la derecha.

[1] Si es texto lo que deseamos escribir lo debemos escribir entre comillas dobles, para que *Mathematica* distinga entre texto y variables a la hora de escribir es suficiente con que marcamos la diferencia colocando las comillas.

◇ **RotateLabel → False**

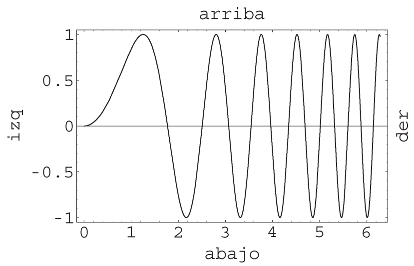
Esta orden hace que los nombres de los lados no roten, de tal forma que los nombres de los lados que se encuentran a derecha e izquierda aparecen en horizontal y no en vertical que es lo que sucede por defecto.

In[8]:= **Plot**[**Sin**[x^2], **{x, 0, 2** π**},Frame → True, FrameLabel → {"abajo", "izq", "arriba", "der"}, RotateLabel → False**]



Out[8]= - Graphics-

In[9]:= **Plot**[**Sin**[x^2], **{x, 0, 2** π**},Frame → True, FrameLabel → {"abajo", "izq", "arriba", "der"}**]



Out[9]= - Graphics-

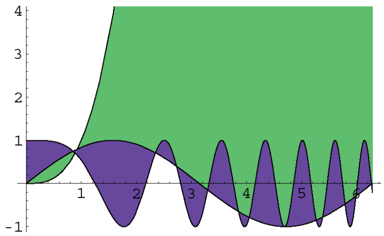
◇ **FilledPlot**[**{**f_1,. . . ,f_n**}, {x, xmin, xmax}**]

Si lo que deseamos es que en la gráfica las funciones que dibujemos aparezcan separadas por colores distintos debemos cargar en primer lugar un paquete; para ello utilizamos la siguiente instrucción:

In[10]:= ≪ **Graphics 'FilledPlot'**

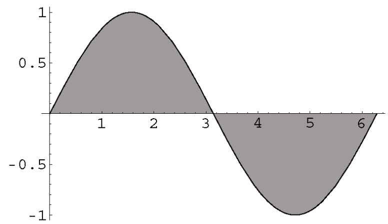
La opción **FilledPlot**[**{**f_1,. . . ,f_n**}, {x, xmin, xmax}**] permite utilizar colores, de tal forma que entre la gráfica de una función f_i y otra f_{i+1} aparece un color diferente. Si solo colocamos una función lo que aparece marcado con color es la zona que se encuentra entre la gráfica y el eje horizontal.

In[11]:= **FilledPlot**[{x^3, **Sin**[x], **Cos**[x^2]}, {x, 0, 2 π}]



Out[11]= - Graphics-

In[12]:= **FilledPlot**[{**Sin**[x]}, {x, 0, 2 π}]



Out[12]= - Graphics-

E 5.1.1 **Dibuja las gráficas de las siguientes funciones en los intervalos indicados, en diferentes gráficos (pon el nombre de la función en cada uno de ellos) y en un mismo gráfico utilizando colores para separar las gráficas:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$ en $[-10, 10]$ b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $[-10, 10]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ en $[-10, 10]$ d) $f(x) = \dfrac{6\,x}{x^2+1}$ en $[-10, 10]$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ en $[-10, 10]$ f) $f(x) = x^3 - 3\,x - 2$ en $[-5, 5]$

g) $f(x) = x^4 - 2x^2$ en $[-2, 2]$.

E 5.1.2 **Calcula dominio, puntos de corte con los ejes, asíntotas horizontales, asíntotas verticales, asíntotas oblicuas, zonas de crecimiento, máximos, mínimos, concavidad y convexidad de las funciones de los apartados a), b) y c) del ejercicio anterior. Comprueba que los resultados obtenidos coinciden con la representación gráfica dada por** *Mathematica***.**

E 5.1.3 **Pon fondos de diferentes colores de fondo en cada una de las gráficas del ejercicio E.5.1.1. Para dos de ellas dibuja una caja alrededor y escribe en los lados de la caja si existen asíntotas que pasen por ese lado de la caja.**

5.2.2. Gráficas en dos dimensiones de funciones dadas de diferentes maneras

Cuando estamos dibujando una curva podemos pensar que dicha curva describe en el espacio el movimiento de una partícula. El movimiento de dicha partícula tiene asociado en cada instante de tiempo t la posición $r(t) = (x(t), y(t))$, de tal forma que la partícula no puede desaparecer del espacio y ocupar dos posiciones distintas en un tiempo tan pequeño como queramos.

⊛ **En forma paramétrica:** en este caso la curva viene expresada en la forma:

$$x = x(t); \qquad y = y(t).$$

La orden que nos permite dibujar en *Mathematica* curvas así expresadas es:

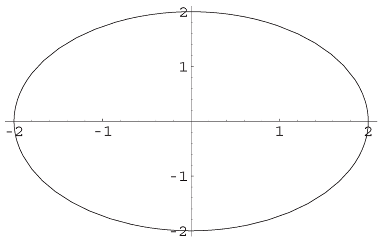
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,tmin,tmax}][1]

Así por ejemplo, para representar una circunferencia de radio general r, en el caso concreto de $r = 2$:

In[13]:= **x[r_, θ_] := r Cos[θ];**

y[r_, θ_] := r Sin[θ];

ParametricPlot[{x[2, θ], y[2, θ]},{θ, 0, 2 π}][2]



Out[15]= - Graphics-

[1]La mayor parte de las opciones vistas en la sección anterior también se pueden utilizar aquí.

[2]Con el fin de que *Mathematica* coloque los ejes del mismo tamaño y la circunferencia tenga realmente la forma de una circunferencia podemos añadir la instrucción **AspectRatio → Automatic**.

⊛ **En coordenadas polares:** a la hora de dibujar una función, dada en coordenadas polares, es suficiente con tener en cuenta que se puede obtener a partir de la forma paramétrica usando el cambio a polares de todos conocido:

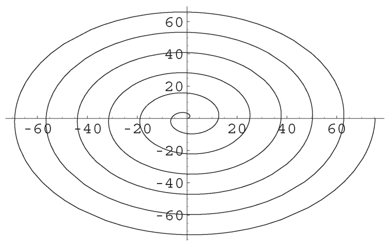
$$x = \rho\cos(\theta); \qquad y = \rho\sin(\theta).$$

Veamos como dibujar una espiral.

In[16]:= **Espiral[a_, θ_] := {r Cos[θ], r Sin[θ]} /. r → a θ;**

ParametricPlot[Espiral[2, θ], {θ, 0, 12 π}]

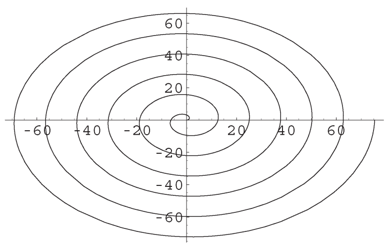
```
ParametricPlot::"ppcom": "Function Espiral[2, θ] cannot
 be compiled; plotting will proceed with the uncompiled function."
```



Out[17]= - Graphics-

Con el fin de evitar que aparezca en pantalla el mensaje anterior en el que se indica que *Mathematica* tiene problemas en la compilación de la gráfica debemos sustituir la orden anterior por

In[18]:= **ParametricPlot[Evaluate[Espiral[2, θ]], {θ, 0, 12 π}]**



Out[18]= - Graphics-

⊛ **En forma implícita:** en este caso la función viene escrita en la forma $F(x, y) = 0$.

Para representar gráficamente funciones que vienen dadas en forma implícita es necesario que previamente incluyamos el siguiente paquete:

In[19]:= $\ll$ **Graphics‘ImplicitPlot‘**

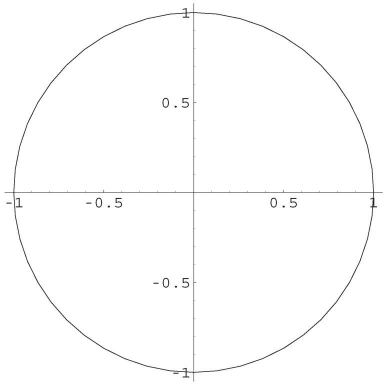
y en este caso utilizamos la instrucción

ImplicitPlot[F(x,y)==0,{x,xmin,xmax}][1]

Así, para dibujar una circunferencia de radio 1:

In[20]:= **F[x_,y_]:=**x^2 **+** y^2 **-1**

ImplicitPlot[F(x,y)==0,{x,-1,1}]



Out[21]= - Graphics-

E 5.1.4 **Dibuja un Nefroide y un Deltoide. Recuerda que el Nefroide viene dado por** $N(r, \theta) = \{3\,r\,\cos(\theta) + r\,\cos(3\,\theta), 3\,r\sin(\theta) + r\sin(3\,\theta)\}$ **con** $\theta \in [-\pi, \pi]$ **y que el Deltoide viene dado por** $D(\theta) = \{\cos(2\,\theta) + 2\,\cos(\theta), -\sin(2\,\theta) + 2\sin(\theta)\}$ **con** $\theta \in [-\pi, \pi]$**.**

E 5.1.5 **Dibuja una parábola de vértice** $(0, 0)$ **dando su expresión en forma implícita, explícita y paramétrica.**

E 5.1.6 **Dibuja una elipse de semieje menor** 3 **y semieje mayor** 6 **dando su expresión en forma implícita, explícita y paramétrica.**

[1] De nuevo en este caso podemos utilizar algunas de las opciones que vimos en el apartado anterior para la orden **Plot**.

E 5.1.7 **Dibuja una hipérbola de semieje menor 3 y semieje mayor 6 dando su expresión en forma implícita, explícita y paramétrica.**[2]

E 5.1.8 **Dibuja una parábola de foco $(0,0)$ y directriz $y=-2$ dando su expresión en forma implícita, explícita y paramétrica.**[1]

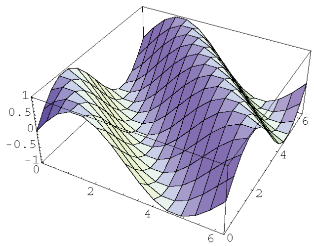
5.2.3. En tres dimensiones

Realizar gráficas de funciones en tres dimensiones de forma manual es realmente complicado, sin embargo, realizar este tipo de gráficas con *Mathematica* es muy sencillo. La orden que nos permite dibujar funciones en tres dimensiones en general es:

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

Esta opción permite generar una gráfica en tres dimensiones, es decir, una gráfica para una función **f** que dependa de dos variables, en este caso **x** e **y**. De forma similar a cuando realizamos un gráfico en dos dimensiones, debemos indicar los intervalos de variación de las variables.

In[22]:= **Plot3D[Sin[x + y], {x, 0, 2 π}, {y, 0, 2 π}]**



Out[22]= - Graphics-

Al dibujar gráficas de funciones en dos dimensiones hemos visto que podemos utilizar una serie de opciones que nos permiten mejorar el aspecto de las gráficas obtenidas. En el caso de funciones en tres dimensiones también existen diferentes opciones que nos permiten mejorar su aspecto. Las opciones que vimos para la orden **Plot** pueden ser aquí utilizadas, además podemos utilizar algunas opciones más, de las que detallamos algunas a continuación.

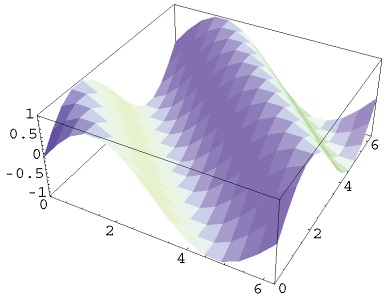
★ **Mesh → False**

[2] En el caso en el que queramos dibujar varias gráficas que ya tenemos creadas juntas podemos utilizar la opción **Show[grafica1,...,grafican]**. La ecuación de la hipérbola en forma paramétrica es:
$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{a}{\cos(\theta)} \\ y = y_0 + \frac{b}{\tan(\theta)} \end{cases}$$

[1] La ecuación de una parábola que tiene de foco $(h, k+p)$, vértice (h,k) y directriz $y = k - p$ es $y - k = \frac{1}{4p}(x-h)^2$.

Esta orden hace que no aparezca una malla sobre la gráfica en tres dimensiones generada.

In[23]:= **Plot3D[Sin[x + y], {x, 0, 2 π}, {y, 0, 2 π},Mesh → False]**

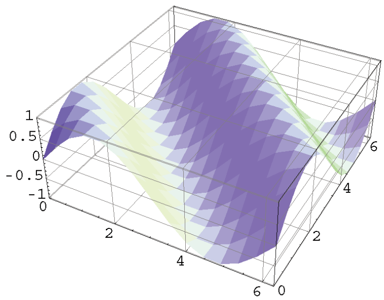


Out[23]= - Graphics-

★ **FaceGrids → All**

Esta opción hace que aparezca una malla en el lateral de la gráfica.

In[24]:= **Plot3D[Sin[x + y], {x, 0, 2 π}, {y, 0, 2 π}, Mesh → False, FaceGrids → All]**

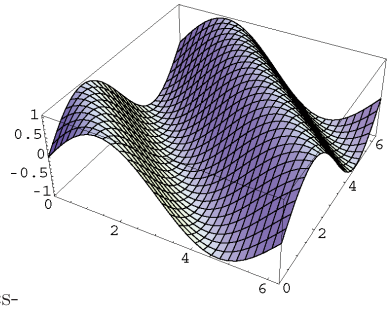


Out[24]= - Graphics-

★ **PlotPoints → n**

Esta opción permite hacer que en el mallado aparezca un número de puntos diferente al que aparece por defecto; **n** indica el número de puntos que deseamos poner en el mallado; este número debe ser mayor o igual que 2. Notemos que cuantos más puntos indiquemos mayor será la precisión de la gráfica resultante.

In[25]:= **Plot3D[Sin[x + y], {x, 0, 2π}, {y, 0, 2π}, PlotPoints → 30]**

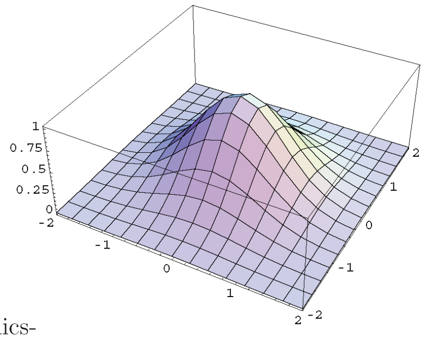


Out[25]= - Graphics-

★ **Shading → False**

Esta opción permite "quitar" la sombra de un gráfico en tres dimensiones; por defecto los gráficos en tres dimensiones aparecen sombreados en *Mathematica*.

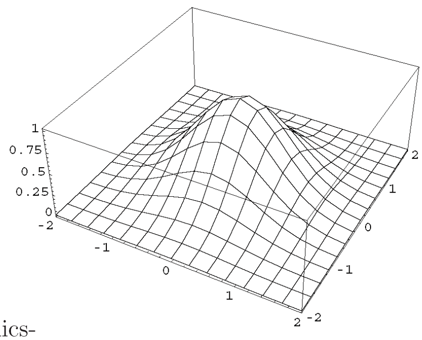
In[26]:= **Plot3D[Exp[**-x^2 **-** y^2], **{x, -2, 2}, {y, -2, 2}**]



Out[26]= - Graphics-

Veamos la diferencia entre un gráfico sombreado y uno no.

In[27]:= **Plot3D[Exp[**-x^2 **-** y^2], **{x, 0 -2, 2}, {y, -2, 2}, Shading → False**]

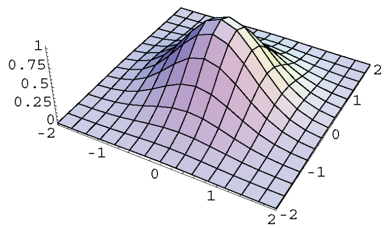


Out[27]= - Graphics-

★ **Boxed → False**

Esta opción permite quitar la caja que rodea a la gráfica.

In[28]:= **Plot3D[Exp[-**x^2 **-** y^2**], {x, 0 -2, 2}, {y, -2, 2}, Shading → False]**



Out[28]= - Gra

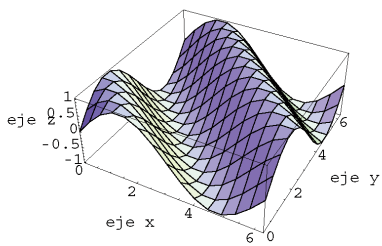
★ **BoxRatios → {tamañox, tamañoy, tamañoz}**

Esta opción permite cambiar el tamaño de la caja en la que se encuentra la figura. Por defecto las longitudes de los lados de la caja son: 1 para el lado correspondiente a la variable x, también 1 para el lado correspondiente a la variable y y para el lado correspondiente a la variable z el tamaño es 0,4.

★ **AxesLabel → { Nombre para el eje x , Nombre para el eje y , Nombre para el eje z }**

Esta opción es una de las que la función **Plot3D** hereda de la función **Plot**; concretamente esta es la opción que permite poner nombres a los ejes.

In[29]:= **Plot3D[Sin[x + y], {x, 0, 2**π**}, {y, 0, 2**π**}, AxesLabel → {"eje x", "eje y", "eje z"}]**



Out[29]= - Graphics-

E 5.1.8 **Representa en forma paramétrica:**[1]

a) la recta $x + y - z = 2; \quad 2\,x - 5\,y + z = 3,$

b) $x^2 + 4y^2 = 4; \quad z = x^2 + 1.$

E 5.1.9 **Representa una hélice circular. La función que representa a una hélice es:** $r(t) = (a\ \cos(t), a\ \mathrm{sen}(t), c\,t).$

E 5.1.10 **Representa las siguientes superficies de la forma más sencilla posible:**

a) Cilíndro elíptico: $x^2 + 4\,y^2 = 4.$

b) Plano xz.

c) Plano $x + y + z = 1.$

d) Elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

e) Hiperboloide $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

f) Esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

g) Paraboloide elíptico $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}.$

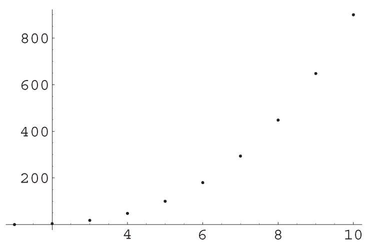
5.3. Puntos, gráficos de listas de puntos

A veces lo que nos puede interesar es dibujar en un gráfico una serie de puntos que tenemos previamente calculados. Unas veces nos interesará dibujar sólo los puntos, otras veces unir dichos puntos, otras veces,... Para estos casos tenemos varias opciones, veamos algunas de ellas:

- **ListPlot[{**y_1,. . . ,y_n**}]**
  Esta orden dibuja la serie de valores y_1,. . . ,y_n en un gráfico en el que en el eje x se toman los valores 1, 2,. . .

  In[30]:= **ListPlot[Table[**i^3-i^2**, {i, 10}]]**

  Out[30]= - Graphics-

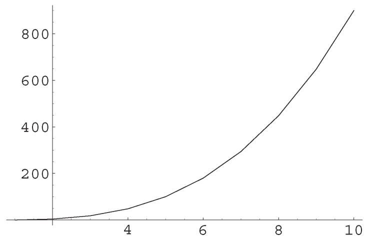


[1]La orden para representar una curva en forma paramétrica en tres dimensiones es **Parametric-Plot3D[funcion,{x,xmin,xmax}].**

- **PlotJoined → True**

  Esta orden permite unir los puntos que aparecen en la gráfica.

  In[31]:= **ListPlot**[**Table**[i^3-i^2, **{i, 10}**],**PlotJoined → True**]

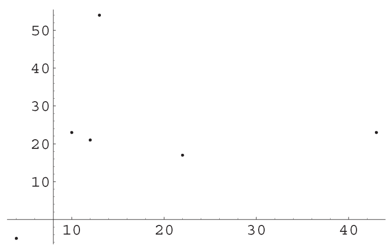


  Out[31]= - Graphics-

- **ListPlot**[**{{**x_1,y_1**}, . . . ,{**x_n,y_n**}}**]

  Esta orden dibuja los pares de puntos $\{x_1,y_1\}, \ldots, \{x_n,y_n\}$.

  In[32]:= **ListPlot**[**{{12, 21}, {22, 17}, {4, -5}, {10, 23}, {43, 23}, {13, 54}}**]

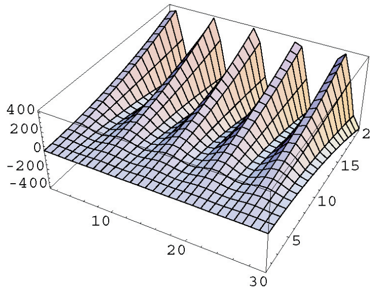


  Out[32]= - Graphics-

- **ListPlot3D**[**matriz**]

  Esta orden dibuja en tres dimensiones los valores correspondientes a la altura que indica la matriz anterior.

  In[33]:= **ListPlot3D**[**Table**[**Sin**[**x**]y^2, **{y, 20}, {x, 30}**]]



Out[33]= - Graphics-

5.4. Algunas curiosidades referentes a los gráficos con *Mathematica*

5.4.1. Animación de figuras

Realmente *Mathematica* no realiza la animación de figuras, sin embargo hace una emulación del movimiento, dibujando para ello la figura de diferentes posturas en la pantalla de forma tan rápida que nos da la impresión de que se está moviendo.

Antes de animar una figura debemos cargar el paquete

In[34]:= ≪**Graphics‘Animation‘**

En el caso en el que lo que queramos sea animar una figura dada en forma paramétrica, la orden que debemos utilizar es:

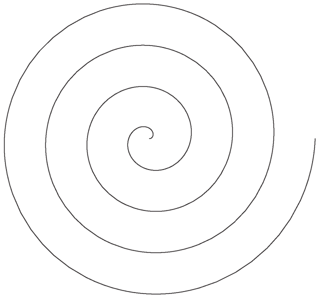
MovieParametricPlot[**{f(x,y),g(x,y)}, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}**]

En el caso en el que queramos ver como se anima la hélice:[1]
podemos utilizar la siguiente orden

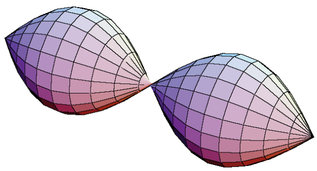
In[35]:= **MovieParametricPlot**[**{s Cos**[**2 Pi s + t**]**, s Sin**[**2 Pi s + t**]**},**
{s, 0, 4}, {t, 0, 2 Pi}, Axes → False, AspectRatio → Automatic,
PlotRange → {{-4, 4}, {-4, 4}}]]

Si lo que tenemos es una figura en tres dimensiones, a veces para conseguir que parezca que se mueve es suficiente con cambiar el ángulo desde el que la estamos mirando. Así, para mover la figura

[1]Con el fin de ver el movimiento de la figura de manera clara realizamos el siguiente proceso: ejecutamos la orden de dibujo, seleccionamos las celdas de salida en las que aparecen los dibujos y pulsamos Ctrl + Y; al hacerlo el movimiento de la figura es constante. Para detener el movimiento es suficiente con pulsar en cualquier otra parte de la pantalla.



In[36]:= **g = ParametricPlot3D[{x, Cos[t] Sin[x] , Sin[t] Sin[x]},**
{x, -Pi, Pi}, {t, 0, 2 Pi}, Axes → False, Boxed → False]



Out[36]= - Graphics-
podemos utilizar la orden
In[37]:= **SpinShow[g, Frames → 10, SpinRange → 0 Degree, 180 Degree]**

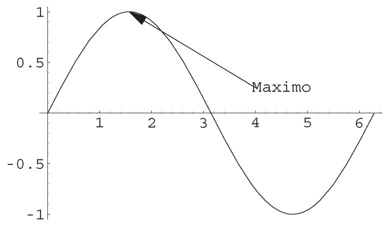
5.4.2. Flechas

En ocasiones cuando estamos realizando un dibujo nos puede interesar utilizar una flecha con la que marcar un punto determinado que nos interesa por cualquier motivo. Veamos como crear flechas con *Mathematica*. La orden para dibujar flechas es:

Arrow[comienzo, final]
con esta orden realizamos una flecha que va desde el punto **comienzo** hasta el punto **final**.

Para crear flechas debemos cargar en primer lugar el paquete:
In[38]:= **≪Graphics‘Arrow‘**

In[39]:= **Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}, Epilog → {Arrow[{4, .25}, {Pi/2, 1}],**
Text[”Maximo”, {4.5, .15}, {0, -1}]}]



Out[39]= - Graphics-

5.4.3. Leyendas

En muchas ocasiones cuando dibujemos figuras nos va a interesar que aparezcan leyendas indicando que es lo que representa cada una de nuestras figuras, veamos como colocar estas leyendas. La orden que debemos utilizar en este caso es:

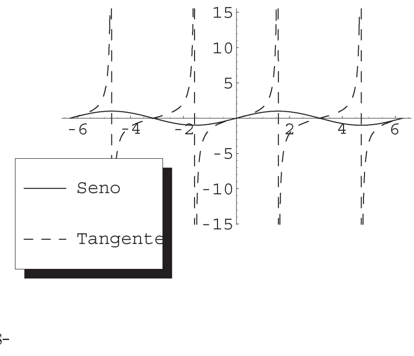
PlotLegend → {"texto1", . . . ,"texton"}

Antes de utilizar esta orden debemos incluir el paquete:

In[40]:= **≪Graphics'Legend'**

Veamos como podríamos dibujar en un mismo gráfico las funciones Seno y Tangente para valores comprendidos entre -2π y 2π, dibujando cada una de ellas de forma diferente, de manera que el Seno aparezca con trazado continuo y la Tangente con trazado discontinuo. Para completar la información vamos a colocar una leyenda indicando que es lo que representa cada uno de los trazados.

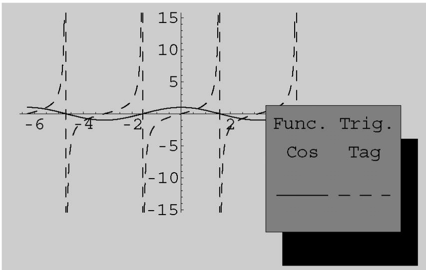
In[41]:= **Plot[{Sin[x], Tan[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotStyle → {GrayLevel[0], Dashing[{.03}]}, PlotLegend → {"Seno", "Tangente"}]**



Out[41]= - Graphics-

Si queremos un gráfico realmente sofisticado podemos tomar ejemplo del siguiente:

In[42]:= **Plot[{Cos[x], Tan[x]}, {x, -2 Pi, 2 Pi}, PlotStyle → {GrayLevel[0], {GrayLevel[0], Dashing[{.03}]}}, PlotLegend → {Ços", "Tag"}, LegendPosition → {.5, -.7}, LegendTextSpace → .5, LegendLabel → "Func. Trig.", LegendLabelSpace → .5, LegendOrientation → Horizontal, LegendBackground → GrayLevel[.5], LegendShadow → {.1, -.2}, Background → GrayLevel[.8]]}**



Out[42]= - Graphics-

Capítulo 6
Estadística descriptiva

6.1. Introducción

En este capítulo introduciremos los elementos básicos para realizar una estadística descriptiva sobre un conjunto de datos. Así, estudiaremos la construcción de una tabla de frecuencias y la obtención de los estadísticos unidimensionales más importantes. Finalmente, introduciremos las distribuciones discretas y continuas más utilizadas y su obtención con *Mathematica*. A lo largo de este capítulo iremos realizando ejercicios estadísticos y paralelamente, los resolveremos con las órdenes de *Mathematica*.

6.2. Tablas de frecuencias

En primer lugar, a la hora de realizar ejercicios estadísticos, que comprenden las sentencias que veremos posteriormente, cargamos el paquete de estadística como sigue:

In[1]:= <<**Statistics‘DataManipulation‘**

En lo que sigue, consideraremos que hemos cargado ya el paquete anterior.

Una tabla de frecuencias es una tabla en la que se recogen, agrupados en columnas, los datos a estudiar, las frecuencias absolutas y relativas y las frecuencias absolutas y relativas acumuladas. Recordemos que los datos pueden ser cuantitativos, cuando vienen representados por números reales, o cualitativos, cuando no se representan de forma numérica.

Para realizar una tabla de frecuencias sobre un conjunto de datos, el primer paso es introducir los datos. En estadística, los datos forman listas, si se está estudiando una característica (por ejemplo, el peso), los datos se denominan unidimensionales y se representan mediante listas simples, mientras que si estudiamos n características (peso, altura,...) los datos se denominan n-dimensionales y se representan por una lista de listas de n elementos. En este capítulo, nos limitaremos a estudios de datos unidimensionales.

Además, distinguiremos entre realizar una tabla de frecuencias sobre datos sin agrupar (por ejemplo, edades: 0,1,2,3,4,... años) y sobre datos agrupados en clases (por ejemplo, estaturas: de 1,45 a 1,55; de 1,55 a 1,65; de 1,65 a 1,75;... metros). Estos últimos resultan convenientes cuando el número de datos a estudiar es demasiado amplio.

6.2.1. Tabla de frecuencias sobre datos sin agrupar

Diremos que los datos están sin agrupar si no están reunidos en clases o intervalos. Generalmente, si el número de datos es muy grande conviene agruparlos, como veremos en el próximo apartado. Sin embargo, veamos el siguiente ejemplo con un número pequeño de datos.

Ejemplo 1:

Comencemos entonces a realizar una tabla de frecuencias sobre el siguiente conjunto de datos, que representa la puntuación obtenida en una prueba de destreza realizada en un grupo de 100 personas:

$$3, 9, 7, 5, 8, 7, 5, 6, 8, 6, 5, 0, 6, 8, 8, 5, 4, 3, 5, 7, 4, 5, 4, 3, 1, 5, 5, 4, 2, 3, 6, 9, 6, 6, 5, 6, 5,$$
$$5, 2, 1, 5, 7, 8, 3, 5, 3, 4, 3, 5, 6, 8, 1, 4, 7, 6, 3, 1, 2, 5, 4, 4, 9, 8, 6, 6, 5, 7, 5, 4, 4, 1, 2, 7, 7,$$
$$5, 2, 4, 1, 2, 4, 6, 7, 6, 4, 2, 6, 3, 8, 2, 6, 6, 9, 9, 4, 4, 9, 4, 10, 5, 5.$$

Lo primero que debemos hacer es clasificar dichos datos, para ello, debemos contar las puntuaciones y el rango de puntuaciones. Esto, queda reflejado en la siguiente tabla, donde en una fila se expresa la puntuación de 0 a 10 y en la otra el número de personas con dicha calificación, es decir la *frecuencia absoluta* de cada puntuación:

punt.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pers.	1	6	8	9	16	20	16	9	8	6	1

Bien, veamos cómo realizar este primer paso con *Mathematica* y ahorrarnos el engorro de realizar el recuento anterior. Para contar el número de datos, *Mathematica* dispone de la siguiente orden:

BinCounts[**datos,{min,max,dx}**]

mediante la cual, *Mathematica* realiza el recuento del número de datos con los valores comprendidos entre **min** y **max** con intervalo **dx**. Esta orden, extrae por tanto la frecuencia absoluta de los datos. Hay que tener cuidado con el siguiente detalle: "si queremos cazar el dato mínimo, no debemos empezar con **min**, sino con **min - cant** (con **cant** positiva)". Es decir, esta orden empieza, por decirlo de alguna manera, a buscar los datos justo encima de **min** sin abarcar este valor.

Con esto, formemos la frecuencias absolutas asociadas a los datos. En primer lugar introducimos la lista de los datos, así como la lista de las puntuaciones posibles (que será la primera columna en la tabla de frecuencias).

In[2]:= **datos1 = {3,9,7,5,8,7,5,6,8,6,5,0,6,8,8,5,4,3,5,7,4,5,4,3,1,5,5,4,2,3,6, 9,6,6,5,6,5,5,2,1,5,7,8,3,5,3,4,3,5,6,8,1,4,7,6,3,1,2,5,4,4,9,8,6,6,5,7, 5,4,4,1,2,7,7,5,2,4,1,2,4,6,7,6,4,2,6,3,8,2,6,6,9,9,4,4,9,4,10,5,5}**;

In[3]:= **punt = Range[Min[datos1],Max[datos1]]**
Out[3]={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

y ahora, realizamos la lista de las frecuencias absolutas:

In[4]:= **frecabs = BinCounts[datos1,{-0.5,10,1}]**
Out[4]= {1,6,8,9,16,20,16,9,8,6,1}

El siguiente paso en la realización de la tabla de frecuencias es formar la lista de las *frecuencias relativas*. Recordemos que estas últimas son las frecuencias absolutas divididas por el número total de datos de estudio o bien, la suma de todas las frecuencias absolutas. El número total de datos, lo tenemos con

In[5]:= **ntotal = Length[datos1]**
Out[5]= 100

Por tanto, la lista de frecuencias relativas es

In[6]:= **frecrel = N[frecabs/ntotal]**
Out[6]= {0.01,0.06,0.08,0.09,0.16,0.2,0.16,0.09,0.08,0.06,0.01}

Finalmente, calculamos las *frecuencias acumuladas*, que representan la suma de frecuencias hasta la puntuación sobre la que se calcula dicha frecuencia acumulada. Con *Mathematica* lo hacemos con la siguiente orden:

CumulativeSums[lista]

que calcula las sumas acumuladas en lista. Por tanto, las frecuencias absolutas acumuladas son

In[7]:= **frecabscum = CumulativeSums[frecabs]**
Out[7]= {1,7,15,24,40,60,76,85,93,99,100}

y las frecuencias relativas acumuladas

In[8]:= **frecrelcum = CumulativeSums[frecrel]**
Out[8]= {0.01,0.07,0.15,0.24,0.4,0.6,0.76,0.85,0.93,0.99,1.}

o bien,

In[9]:= **frecrelcum = N[frecabscum/ntotal]**
Out[9]= {0.01,0.07,0.15,0.24,0.4,0.6,0.76,0.85,0.93,0.99,1.}

Finalmente, construimos la tabla de frecuencias: para ello, vamos a formar una matriz con las siguientes columnas:

	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Relativas
DATOS	PUNTUAL ‖ ACUMULADA	PUNTUAL ‖ ACUMULADA

Por tanto, una matriz con 5 columnas.

In[10]:= **c1 = punt; c2 = frecabs;**
c3 = frecabscum; c4 = frecrel;
c5 = frecrelcum; tabla = {c1,c2,c3,c4,c5};
MatrixForm[Transpose[tabla]]
Out[10]//MatrixForm =

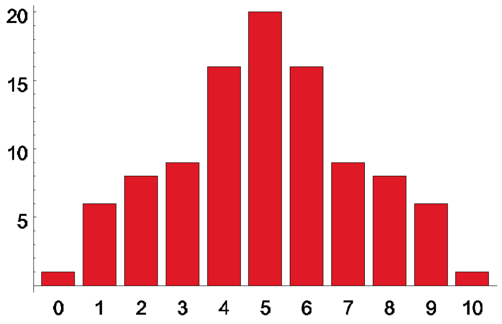
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0{,}01 & 0{,}01 \\ 1 & 6 & 7 & 0{,}06 & 0{,}07 \\ 2 & 8 & 15 & 0{,}08 & 0{,}15 \\ 3 & 9 & 24 & 0{,}09 & 0{,}24 \\ 4 & 16 & 40 & 0{,}16 & 0{,}4 \\ 5 & 20 & 60 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 6 & 16 & 76 & 0{,}16 & 0{,}76 \\ 7 & 9 & 85 & 0{,}09 & 0{,}85 \\ 8 & 8 & 93 & 0{,}08 & 0{,}93 \\ 9 & 6 & 99 & 0{,}06 & 0{,}99 \\ 10 & 1 & 100 & 0{,}01 & 1. \end{pmatrix}$$

A partir de la tabla de frecuencias podemos realizar también el *Histograma* o *Diagrama de Barras*, así como el polígono de las *Frecuencias o Porcentajes acumulados*. Para realizar el Histograma, en las abcisas colocamos las puntuaciones y en las alturas las diferentes frecuencias absolutas. Utilizamos la orden

BarChart[lista-datos]

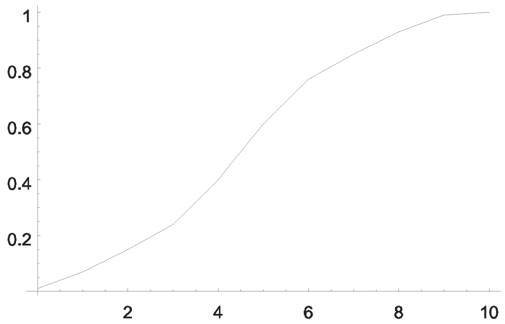
que genera un diagrama de barras, con la lista de datos dada donde, para cada elemento de dicha lista, se representa una pareja de números $\{n_i, p_i\}$, con n_i la frecuencia a representar en el punto p_i. La orden anterior funciona cargando previamente el paquete "Graphics".

In[11]:= <<**Graphics'Graphics'**;
In[12]:= **BarChart**[**Transpose**[**{frecabs,punt}**]]



Out[12]= -Graphics-
Finalmente, el polígono de *Frecuencias Acumuladas*:

In[13]:= **ListPlot**[**Transpose**[**{punt,frecrelcum}**],**PlotJoined→True**]



Out[13]= -Graphics-

6.2.2. Tabla de frecuencias sobre datos agrupados en clases

Cuando se realiza un estudio estadístico sobre un conjunto de datos con demasiados elementos, conviene agrupar estos en clases o intervalos. Recordemos que una clase viene determinada por los *Extremos de clase* (extremos del intervalo), por la *Marca de clase* (punto medio del intervalo) y por la *Amplitud de clase* (longitud del intervalo). La tabla de frecuencias es similar a la anterior sólo que añadimos la columna de la marca de clase, como vemos en el siguiente esquema:

	MARCA	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Relativas
CLASE	DE CLASE	CLASE ‖ ACUMULADA	CLASE ‖ ACUMULADA

Por otro lado, hay que tener precaución con la cantidad de clases que hay que tomar según el número de datos que tengamos, puesto que podemos encontrarnos con una pérdida de información importante o irregularidades debidas a una mala distribución. Existen medios para calcular el número de clases en función de los datos. Por ejemplo, un número de clases recomendable lo proporciona la fórmula de Sturges:

$$\text{num} - \text{clases} = \left[\frac{3}{2} + \frac{\log n}{\log 2}\right]$$

donde $[*]$ representa la función parte entera y n es el tamaño de la muestra.

Finalmente, si se puede, es conveniente elegir clases de igual longitud y procurando que ninguna clase quede sin elementos.

Ejemplo 2:

Con esto, vamos a realizar la tabla de frecuencias sobre el siguiente conjunto de datos, que representa el perímetro craneal medido en niños de edad comprendida entre los dos y tres años. Los datos que poseemos son:

$$41, 39{,}5, 43{,}2, 40{,}5, 44{,}5, 38{,}5, 42{,}5, 40{,}3, 46{,}3, 42{,}3, 45{,}6, 44{,}2, 40{,}1, 43{,}5, 40{,}2,$$
$$42{,}7, 45, 45{,}2, 46{,}7, 39{,}4, 41, 39, 39{,}6, 42{,}8, 47{,}9, 46{,}5, 40{,}2, 43, 40, 46$$

Introducimos los datos en *Mathematica*,

In[14]:= **datos2 = {41, 39.5, 43.2, 40.5, 44.5, 38.5, 42.5, 40.3, 46.3, 42.3, 45.6, 44.2, 40.1, 43.5, 40.2, 42.7, 45.3, 45.2, 46.8, 39.4, 41, 39, 39.6, 42.8, 47.9, 46.5, 40.2, 43,40,46}**

Out[14]= {41, 39.5, 43.2, 40.5, 44.5, 38.5, 42.5, 40.3, 46.3, 42.3, 45.6, 44.2, 40.1, 43.5, 40.2,42.7, 45.3, 45.2, 46.8, 39.4, 41, 39, 39.6, 42.8, 47.9, 46.5, 40.2, 43,40,46}

y con la fórmula de Sturges veamos cuantas clases son convenientes:

In[15]:= **ntotal=Length[datos2]**

Out[15]= 30

In[16]:= **nclases=Floor[3/2+Log[ntotal]/Log[2]]**[1]

*Out[16]=*6

por lo que formamos seis clases o intervalos. Si analizamos la diferencia de perímetro craneal entre los valores para ver cuánta podría ser la longitud de los intervalos,

In[17]:= **Max[datos2]-Min[datos2]**

Out[17]= 9.4

In[18]:= **N[%/6]**

Out[18]= 1.56667

[1]**Floor[num]** devuelve el mayor entero menor o igual que num, es decir, devuelve la parte entera de num.

luego, podríamos tomar por ejemplo 6 clases de amplitud 1.7. Si observamos el rango,

In[19]:= **{Min[datos2],Max[datos2]}**
Out[19]={38.5,47.9}

podemos formar 6 clases comenzando en 38.2 de la siguiente forma:

In[20]:= **clases=Table[{38.2+i*1.7,38.2+(i+1)*1.7},{i,0,5}]**
Out[20]={{38.2,39.9},{39.9,41.6},{41.6,43.3},{43.3,45.},{45.,46.7},{46.7,48.4}}

y de esta manera, ningún elemento del rango está en los extremos de las clases, lo cual es más sencillo (aunque siempre se podría solucionar tomando un criterio al respecto de los extremos de los intervalos). La Marca de clase, como es el punto medio de los intervalos, podemos calcularla también con **Table**:

In[21]:= **mclases=Table[(clases[[i,1]]+clases[[i,2]])/2,{i,1,6}]**
Out[21]={39.05,40.75,42.45,44.15,45.85,47.55}

Una vez preparados los datos, comenzamos a realizar la tabla de frecuencias. La *Frecuencia Absoluta* de las clases, la obtenemos con

RangeCounts[datos,{e_1,e_2,e_3,...,e_n}]

que proporciona la lista del número de datos (frecuencia absoluta) que aparecen en cada una de las clases de extremos $-\infty$,e_1,e_2,e_3,...,e_n,∞. Por tanto, en nuestro caso, será:

In[22]:= **frecabs=RangeCounts[datos2,Table[clases[[i,2]],{i,1,5}]]**
Out[22]={5,8,6,3,6,2}

Podemos analizar el contenido de los datos más detalladamente y obtener un lista de los datos que aparecen en cada una de las clases. Para ello, se dispone de la orden

BinLists[datos,{min,max,amp}]

que proporciona la lista de los datos que aparecen en cada una de las clases, comenzando en **min** y terminando en **max**, con igual amplitud **amp**. Así, obtenemos:

In[23]:= **BinLists[datos2,{38.2,48.4,1.7}]**
Out[23]={{39.5,38.5,39.4,39,39.6},{41,40.5,40.3,40.1,40.2,41,40.,40.2},
{43.2,42.5,42.3, 42.7,42.8,43},{44.5,44.2,43.5,45},
{46.3,45.6,45.3,45.2,46.,46.5},{46.8,47.9}}

Finalmente, obtenemos la *Frecuencia Relativa* y las *Frecuencias Acumuladas*.

In[24]:= **frecrel = N[frecabs/ntotal]**

Out[24]= {0.166667,0.266667,0.2,0.1,0.2,0.0666667}

In[25]:= **frecabscum = CumulativeSums[frecabs]**
Out[25]= {5,13,19,22,28,30}

In[26]:= **frecrelcum = CumulativeSums[frecrel]**
Out[26]= {0.166667,0.433333,0.633333,0.733333,0.933333,1.}

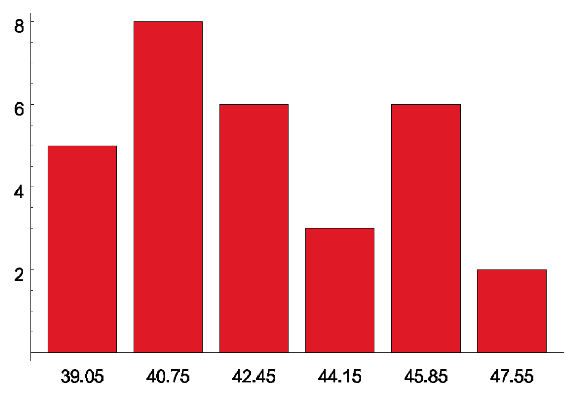
Ya estamos en disposición de realizar la tabla de frecuencias para el caso de datos agrupados en clases. Las 6 columnas correspondientes a la tabla son:

In[27]:= **c1 = clases; c2 = mclases; c3 = frecabs;**
c4 = frecabscum; c5 = frecrel; c6 = frecrelcum;
tabla = {c1,c2,c3,c4,c5,c6};
MatrixForm[Transpose[tabla]]
Out[27]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} \{38{,}2, 39{,}9\} & 39{,}05 & 5 & 5 & 0{,}166667 & 0{,}166667 \\ \{39{,}9, 41{,}6\} & 40{,}75 & 8 & 13 & 0{,}266667 & 0{,}433333 \\ \{41{,}6, 43{,}3\} & 42{,}45 & 6 & 19 & 0{,}2 & 0{,}633333 \\ \{43{,}3, 45.\} & 44{,}15 & 3 & 22 & 0{,}1 & 0{,}733333 \\ \{45., 46{,}7\} & 45{,}85 & 6 & 28 & 0{,}2 & 0{,}933333 \\ \{46{,}7, 48{,}4\} & 47{,}55 & 2 & 30 & 0{,}0666667 & 1. \end{pmatrix}$$

De la misma forma que en el ejercicio anterior, podemos realizar el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.

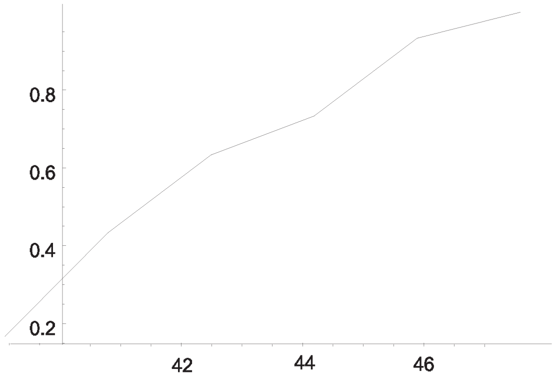
In[28]:= <<**Graphics‘Graphics‘;**
*In[29]:=***BarChart[Transpose[{frecabs,mclases}]]**



Out[29]= -Graphics-

Y el polígono de *Frecuencias Acumuladas*:

In[30]:= **ListPlot[Transpose[{mclases,frecrelcum}],PlotJoined→True]**



Out[30]= -Graphics-

E 6.1.1 **Los 100 alumnos que se presentaron al examen de H.M.O. en la convocatoria de Junio obtuvieron las siguientes calificaciones:**

7	3	2	4	5	1	8	6	1	5	3	2	4	9	8	1	0	2	4	1
2	5	6	5	4	7	1	3	0	5	8	6	3	4	0	10	2	5	7	4
0	2	1	5	6	4	3	5	2	3	9	7	3	4	3	5	7	4	6	5
6	1	0	5	7	8	5	2	3	10	4	6	2	1	1	2	6	7	4	5
4	7	6	3	5	0	2	8	2	7	8	5	2	7	1	4	6	3	5	6

1. Obtén la tabla de frecuencias de las calificaciones.

2. Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.

3. ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvieron un notable?

4. ¿Cuál es el porcentaje de aprobados?

E 6.1.2 **Se consideran las siguientes 30 puntuaciones correspondientes a la prueba de test teórico,**

50	32	33	46	49	31	36	57	54	48	36	53	34	54	43
45	49	47	50	39	50	55	33	52	38	41	53	46	50	47

1. Obté la tabla de frecuencias de las calificaciones.

2. Dibuja el diagrama de barras y el polígono de frecuencias acumuladas.

3. ¿Qué porcentaje de alumnos obtuvieron una calificación inferior a 40?

E 6.1.3 **Dada la siguiente tabla:**

datos	fre.abs.	frec.rel.	frec.abs.acum.	frec.rel.acum.
10	2	0.05	2	0.05
13	4	0.1	6	0.15
16	-	-	16	0.4
19	15	-	-	-
22	6	0.15	37	0.925
25	-	-	-	1

1. **Completa los datos que faltan.**
2. **Representa el diagrama de barras.**
3. **Representa el polígono de frecuencias acumuladas.**

E 6.1.4 **Los ingresos mensuales de una muestra de 500 familias se distribuyen de la forma siguiente:**

INGRESOS ($\times 10^3$)	FAMILIAS
0-50	15
50-100	71
100-150	72
150-200	75
200-250	128
250-300	64
300-350	45
350-400	30

1. **Construye la tabla de frecuencias.**
2. **Representa el diagrama de barras.**
3. **Representa el polígono de frecuencias acumuladas.**
4. **¿Qué porcentaje de familias ingresa entre 150.000 y 300.000 pts?**

E 6.1.5 **En una población, se ha tomado la talla de 16 chicos/as, obteniéndose las siguientes estaturas en cm:**

160, 172.4, 168, 167, 175, 179, 180, 198, 164, 166, 174, 177, 182.5, 185, 191, 173.5

1. Agrupa los datos en 4 ó 5 intervalos de amplitud constante.

2. Obtén la tabla de frecuencias.

3. Representa el polígono de frecuencias acumuladas.

4. ¿Qué porcentaje de chicos/as mide menos de 165 cm?

5. ¿Qué porcentaje de chicos/as mide más de 180 cm?

E 6.1.6 **La distribución de las acciones de una empresa entre sus propietarios está dada por la siguiente tabla:**

ACCIONES	PROPIETARIOS
0-4	2
4-8	5
8-12	8
12-16	15
16-20	30
20-24	16
24-28	7
28-32	6
32-36	6

1. Construye la tabla de frecuencias.

2. Representa el diagrama de barras.

3. Representa el polígono de frecuencias acumuladas.

4. ¿Qué porcentaje de propietarios tiene más de 20 acciones?

4. ¿Qué porcentaje de propietarios tiene entre 12 y 24 acciones?

6.3. Estadísticos unidimensionales

Estudiaremos las medidas más importantes que reflejan la posición (tendencia central), la dispersión y la forma de la distribución de los datos observados.

A lo largo de esta sección, obtendremos los estadísticos más importantes para los ejemplos anteriores.

Para obtener los estadísticos unidimensionales, cargaremos el siguiente paquete:

In[31]:= <<**Statistics‘DescriptiveStatistics‘**

y en lo que sigue, consideraremos que hemos cargado ya el paquete anterior.

6.3.1. Medidas de posición

Las medidas de posición son valores que fijan el comportamiento global del fenómeno a partir de los datos individuales recogidos de la información disponible. En particular, las medidas de tendencia central, nos proporcionan información sobre la distribución de los datos en torno a los valores centrales de la distribución. Veamos las medidas más importantes y su obtención con *Mathematica*.

La *Media Aritmética*, que se define por el valor

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

donde x_i representa el dato de frecuencia absoluta n_i en el caso de datos no agrupados, y, en el caso de datos agrupados x_i representa la marca de clase del intervalo de frecuencia absoluta n_i. La orden de *Mathematica* es:

Mean[**lista**]

que calcula la media de los datos incluidos en la lista dada. Así, en el primer ejemplo (ver datos en la página 118), la Media es:

In[32]:= **Mean**[**datos1**]
Out[32]:= 5

Mientras que en el ejemplo de las medidas craneales (ver datos en la página 122):

In[33]:= **Mean**[**datos2**]
Out[33]:= 42.5867

Una de las mayores desventajas de la Media Aritmética es su sensibilidad a los valores de los extremos. Menos sensible a los valores extremos que la Media Aritmética, aunque menos utilizada y menos intuitiva, es la *Media Geométrica*, con definición:

$$g = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \cdots x_n^{x_n}} \qquad N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

y se obtiene con

GeometricMean[**lista**]

que calcula la media geométrica de los datos incluidos en la lista. Así, en el ejemplo 1, tendremos

In[34]:= **GeometricMean**[**datos1**]

Out[34]:= 0

que es uno de los inconvenientes de la Media Geométrica, pues si uno de los puntos toma el valor 0, entonces dicha media vale 0 y deja de ser representativa.[1]

Y en el ejemplo 2:

In[35]:= **GeometricMean[datos2]**
Out[35]:= 42.5034

Finalmente, podemos calcular la *Media Armónica*, cuya definición es:

$$h = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \cdot n_i} \qquad N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

y *Mathematica* la calcula con,

HarmonicMean[lista]

que calcula la media armónica de los datos incluidos en la lista. En los ejemplos 1 y 2 respectivamente:

In[36]:= **HarmonicMean[datos1]**

```
Power::infy : Infinite expression 1/0 encountered.
```

Out[36]:= 0

que es también el inconveniente de esta Media, los valores que se anulan en el conjunto de datos.

In[37]:= **HarmonicMean[datos2]**
Out[37]:= 42.4209

Otra medida de tendencia central muy importante es *La Mediana* que se define como el valor central de la distribución, es decir, el valor que deja a izquierda y a derecha el 50 % de los datos de la distribución. La Mediana es una medida más robusta que la Media, en el sentido de menor sensibilidad a los valores extremos. *Mathematica* la calcula con la orden,

Median[lista]

que calcula la Mediana de los datos incluidos en la lista. Que en los ejemplos 1 y 2, respectivamente:

In[38]:= **Median[datos1]**
Out[38]:= 5

[1] Tampoco es válida en el caso de valores negativos.

In[39]:= **Median[datos2]**
Out[39]:= 42.6

Finalmente, entre las medidas de tendencia central tenemos la *Moda* M_o, que es el valor de la variable que más veces se repite, y en consecuencia, en una distribución de frecuencias, es el valor que viene afectado por la máxima frecuencia de la distribución. Con *Mathematica* se calcula,

Mode[lista]

que calcula la Moda de los datos incluidos en la lista. En el caso de datos agrupados nos proporciona el *Intervalo Modal*, que es la clase de mayor frecuencia. En los ejemplos 1 y 2, respectivamente:

In[40]:= **Mode[datos1]**
Out[40]:= 5

In[41]:= **Mode[datos2]**
Out[41]:= {40.2,41}

Otras medidas de posición, que no reflejan la tendencia central son los *Cuantiles*. Estos valores, dividen la distribución en partes iguales, en intervalos, que comprenden la misma frecuencia de aparición. Los de uso más frecuentes son los *Cuartiles*, *Deciles* y *Percentiles*.

Los *Cuartiles* (Cuantiles de órdenes 0.25,0.5,0.75) son los 3 valores de la distribución que la dividen en 4 partes iguales, es decir, en cuatro intervalos con el 25 % de las frecuencias en cada una de ellas.

Los *Deciles* (Cuantiles de órdenes 0.1,0.2,. . . ,0.9) son los 9 valores de la distribución que la dividen en 10 partes iguales con el 10 % de la frecuencia en cada uno de ellos.

Los *Percentiles* (Cuantil de órdenes 0.01,0.02,0.03,. . . ,0.99) son los 99 valores que dividen la distribución en 100 partes con igual frecuencia.

En general el *Cuantil de orden q* es el valor numérico tal que tal que ni la frecuencia relativa de los valores observados menores que él supera el valor q, ni la frecuencia de los valores mayores supera el valor 1-q. Con *Mathematica* utilizamos,

Quantile[lista,q]

que calcula el Cuantil de orden q los datos incluidos en la lista. Veamos algunos de ellos en los ejemplos:
En el Ejemplo 1: los cuartiles,

In[42]:= **Quantile[datos1,0.25]**
Out[42]:= 4

In[43]:= **Quantile[datos1,0.5]**
Out[43]:= 5

In[44]:= **Quantile[datos1,0.75]**
Out[44]:= 6

es decir, el 25 % de las puntuaciones son inferiores a 4, el 25 % son entre 4 y 5, el 25 % entre 5 y 6, y el 25 % superiores a 6. Algunos percentiles,

In[45]:= **Quantile[datos1,0.05]**
Out[45]:= 1

In[46]:= **Quantile[datos1,0.95]**
Out[46]:= 9

Y, en el ejemplo 2, veamos el 25 % de las medidas superiores del perímetro craneal, están por encima del valor:

In[47]:= **Quantile[datos2,0.75]**
Out[47]:= 45.2

y el primer decil, el 10 % de las medidas más bajas están por debajo de:

In[48]:= **Quantile[datos2,0.1]**
Out[48]:= 39.4

6.3.2. Medidas de dispersión

En el párrafo anterior, hemos calculado una serie de medidas cuya finalidad es sintetizar la información en dichos valores. A la mayor o menor separación del resto de valores respecto de dichas medidas síntesis, se le denomina dispersión o variabilidad.

Las medidas de dispersión tienen por finalidad medir el grado de dispersión con respecto a la Media. Las medidas de dispersión más importantes son la Varianza y su raíz cuadrada.

La *Varianza* es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable respecto de la media aritmética:

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 \frac{n_i}{N}, \quad N = \sum_{i=1}^{n} n_i$$

donde x_i representa la marca de clase en el caso de datos agrupados. Es evidente que, si la Varianza es muy grande, entonces la Media Aritmética es poco representativa.

Mathematica dispone de la orden

VarianceMLE[**lista**]

que calcula la Varianza de los datos incluidos en la lista.

La *Desviación típica* σ es la raíz cuadrada positiva de la Varianza, y, en numerosas ocasiones, es una medida más utilizada puesto que al venir dada en la misma magnitud que los datos, la hace más representativa como medida de dispersión. *Mathematica* nos la proporciona con la orden

StandardDeviationMLE[**lista**]

que calcula la Desviación típica de los datos incluidos en la lista.

Calculamos ahora dichos valores para los ejemplos 1 y 2 (le pedimos el valor numérico con **N**[]):

In[49]:= **N**[**VarianceMLE**[**datos1**]]
Out[49]:= 4.9

In[50]:= **N**[**StandardDeviationMLE**[**datos1**]]
Out[50]:= 2.21359

luego, en la distribución primera, no hay una gran dispersión en torno al valor central.

In[51]:= **VarianceMLE**[**datos2**]
Out[51]:= 7.16182

In[52]:= **StandardDeviationMLE**[**datos2**]
Out[52]:= 2.67616

tampoco se aprecia una gran dispersión. Finalmente, una simple comprobación:

In[53]:= **StandardDeviationMLE**[**datos2**]**==Sqrt**[**VarianceMLE**[**datos2**]]
Out[53]:= True

6.3.3. Medidas de forma

Como su nombre indica, son medidas que nos proporcionan información sobre la forma, en cuanto a simetría y apuntamiento de la distribución de los datos. Distinguimos así entre dos tipos de medidas:

1. Medidas de asimetría, que se dirigen a elaborar un indicador que permita establecer el grado de simetría que presenta la distribución. Así, diremos que una distribución es simétrica si existe el mismo número de valores a ambos lados del eje de simetría por la Media $\overline{x}$, equidistantes dos a dos de dicha media. Veamos, dos de las medidas más habituales:

Coeficiente de asimetría de Fisher, que viene dado por:

$$g_1 = \frac{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3 n_i}{\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \frac{n_i}{N}\right)^{3/2}}$$

e indica:

Si $g_1 = 0$, hay simetría,

Si $g_1 > 0$, hay asimetría positiva: hay más cola a la izquierda,

Si $g_1 < 0$, hay asimetría negativa: hay más cola a la derecha.

Mathematica calcula este coeficiente con:

Skewness[lista]

Veamos en los ejemplos. En el primero, hay una distribución claramente simétrica, luego:

In[54]:= **Skewness[datos1]**

Out[54]:= 0

como era de esperar. Mientras que en el ejemplo 2:

In[55]:= **Skewness[datos2]**

Out[55]:= 0.280763

que es una asimetría positiva o a izquierda, como también se aprecia en la gráfica.

La otra medida de asimetría es el *Coeficiente de Pearson* más usual en distribuciones campaniformes y unimodales (con una moda):

$$a = \frac{\overline{x} - M_o}{\sigma}$$

e indica:

Si $a = 0$, hay simetría,

Si $a > 0$, hay asimetría positiva,

Si $a < 0$, hay asimetría negativa.

Mathematica lo calcula con,

PearsonSkewness1[**lista**]

que en los ejemplos es:

In[56]:= **PearsonSkewness1**[**datos1**]

Out[56]:= 0

In[57]:= **PearsonSkewness1**[**datos2**]

Out[57]:= {2.63051,1.74877}

donde, en este último caso se observa el resultado debido a que la distribución es bimodal.

2. Medidas de apuntamiento o curtosis, que se dirigen a estudiar la distribución de frecuencias en la zona central, comparando el apuntamiento con el de la distribución Normal (Gaussiana). Estas medidas, van dirigidas a distribuciones campaniformes e unimodales y son muy usuales en economía. Si la distribución está más apuntada que la normal se dice *leptocúrtica* y si está menos apuntada *platicúrtica*, será *mesocúrtica* si está igual que la normal.

   Definimos el *Coeficiente de apuntamiento o curtosis* g_2 como aquél que indica:

   Si $g_2 = 0$, la distribución es mesocúrtica,

   Si $g_2 > 0$, la distribución es leptocúrtica,

   Si $g_2 < 0$, la distribución es platicúrtica.

   Mathematica lo calcula con,

   Kurtosis[**lista**]

   Así, en el primer ejemplo (unimodal), tenemos:

   In[58]:= **N**[**Kurtosis**[**datos1**]]

   Out[58]:= 2.47314

   luego la distribución es leptocúrtica.

E 6.2.1 **Calcula las medidas de tendencia central de los ejercicios [E 6.1.1] y de [E 6.1.2].**

E 6.2.2 **Para el ejercicio [E 6.1.4] obtén:**

a) Ingreso medio por familia,

b) Ingreso modal,

c) La Mediana de estos ingresos.

E 6.2.3 **Para el ejercicio [E 6.1.5] se pide:**

a) Media aritmética, media geométrica y media armónica,

b) Obtén la mediana,

c) Calcula la desviación típica y

d) Calcula el coeficiente de variación de Pearson.

E 6.2.4 **Estudia la simetría y apuntamiento del ejercicio de [E 6.1.6].**

E 6.2.5 **En una empresa, el 20 % es personal "no cualificado", el 50 % es personal "cualificadoz el resto es personal "técnico". La plantilla consta de 1000 empleados. Se ha estimado la productividad para cada uno de estos grupos en unos coeficientes que van de 1 a 5, obteniéndose la tabla siguiente:**

C.P.	N.C.(%)	C.(%)	T.(%)	Tot.(%)
1	10	5	-	4.5
2	20	20	10	17
3	30	20	40	28
4	30	40	30	35
5	10	15	20	15.5

(C.P.: Coeficiente de productividad, N.C.(%): porcentaje de No-cualificados, C.(%): porcentaje de Cualificados, T.(%): porcentaje de Técnicos, Tot.(%): Total de trabajadores.)

a) Dibuja la tabla de frecuencia correspondiente al personal no-cualificado y cualificado.

b) Halla la productividad media de los 1000 empleados.

c) ¿Qué nivel de productividad es el más habitual en esta empresa?

d) ¿Bajo qué coeficiente están el 50 % de los trabajadores menos productivos?

e) Comparando las productividades medias del personal no cualificado y del personal cualificado, ¿Cuál de ellas corresponde a una distribución de frecuencia más homogénea?

E 6.2.6 **El gasto de dos grupos de familias durante un cierto periodo de tiempo ha sido el siguiente:**

GRUPO A		GRUPO B	
Gasto	Nº familias	Gasto	Nº familias
10	14	8	5
12	16	10	10
14	20	11	15
16	15	13	30
18	18	15	20
20	17	18	16
		20	4
	100		100

a) Realiza las tablas de frecuencias correspondientes a los dos grupos. Dibuja los diagramas de barras,

b) Calcula la Media aritmética, la Varianza y la Desviación típica,

c) Calcula el coeficiente de variación de Pearson y la curtosis,

d) A la vista de los resultados, determina cuál de los dos grupos es el más homogéneo.

6.4. Distribuciones de variables aleatorias

Para finalizar, veremos la distribución de variables aleatorias con *Mathematica*. Veamos un ejemplo de variable aleatoria discreta y uno de variable aleatoria continua.

• **Variables aleatorias discretas**

En primer lugar, cargamos el paquete de estas distribuciones con:

In[59]:= <<**Statistics‘DiscreteDistributions‘**

Mathematica tiene definidas las distribuciones discretas más importantes (o más utilizadas) y, para cada una de ellas se puede obtener sus propiedades elementales como la función de masa o probabilidad, la función de distribución, la media, la varianza,

...Veamos de manera resumida la distribución Binomial y obtengamos sus elementos con *Mathematica*:

La variable aleatoria *Binomial* es una de las más útiles, fundamentalmente en inspección de calidad de productos, economía,... dicha variable X representa el "número de éxitos en n ensayos independientes", donde hay una probabilidad p de éxito y una probabilidad $1-p$ de fracaso. Por tanto, la función de masa será:

$$p(x) = P\{X = x\} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

mientras que la función de distribución

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Con esta introducción, veamos los elementos de la distribución, para ello definimos la distribución Binomial $B(n,p)$

In[60]:= **dist=BinomialDistribution[n,p]**
Out[60]:= BinomialDistribution[n,p]

Para calcular la función de masa, tenemos la orden

PDF[dist,x]

que proporciona la función de masa de la variable aleatoria de distribución **dist**. Por tanto, para la binomial

In[61]:= **PDF[dist,x]**
Out[61]:= $(1-p)^{n-x} p^x \mathit{Binomial}[n,x]$

donde $\mathit{Binomial}[n,x]$ es el número combinatorio $\binom{n}{x}$.

La función de distribución, la obtenemos con

CDF[dist,x]

que proporciona la función de distribución de la variable aleatoria de distribución **dist**. Para la binomial

In[62]:= **CDF[dist,x]**
Out[62]:= BetaRegularized[1-p,n-Floor[x],1+Floor[x]]

Finalmente, obtengamos más características con órdenes ya vistas:

La Media:

In[63]:= **Mean[dist]**
Out[63]:= n p

La Varianza:

In[64]:= **Variance[dist]**
Out[64]:= n p (1-p)

La Desviación Típica:

In[65]:= **StandardDeviation[dist]**
Out[65]:=$\sqrt{\mathrm{np}(1-\mathrm{p})}$

El dominio:

In[66]:= **Domain[dist]**
*Out[66]:=*Range[0,n]

Los Cuantiles:

In[67]:= **Quantile[dist,q]**
*Out[67]:=*Quantile[BinomialDistribution[n,p],q]

La simetría:

In[68]:= **Skewness[dist]**
Out[68]:=$\frac{1-2\mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}(1-\mathrm{p})\mathrm{p}}}$

La curtosis:

In[69]:= **Kurtosis[dist]**
Out[69]:=$3+\frac{1-6(1-\mathrm{p})\mathrm{p}}{\sqrt{\mathrm{n}(1-\mathrm{p})\mathrm{p}}}$

Ejemplo: Con estudios recientes, se ha determinado que la probabilidad de morir por causa de cierta vacuna contra la gripe es de 0.00002. Si se administra la vacuna a 100000 personas y se supone que éstas constituyen un conjunto independiente de ensayos, ¿Cuál es la probabilidad de que no mueran más de dos personas a causa de la vacuna?

En este caso, consideramos la variable aleatoria discreta:

X= número de muertes en 100000 ensayos independientes, con

p= 0.00002

Esta variable aleatoria sigue una distribución $B(100000, 0{,}00002)$. Por tanto, la probabilidad que se nos pide es:

$$P\{X \leq 2\} = F(2)$$

donde F representa la función de distribución de la binomial. Con *Mathematica*, resolvemos el problema:

In[70]:= **Clear[dist]; dist=BinomialDistribution[100000,0.00002]**

Out[70]:= BinomialDistribution[100000,0.00002]

La probabilidad pedida será:

In[71]:= **N[CDF[dist,2]]**
Out[71]:= 0.676676

Finalmente, mostramos la lista de las distribuciones más utilizadas de variables aleatorias discretas que podemos obtener con *Mathematica*:

BernoulliDistribution[n],
BinomialDistribution[n,p],
DiscreteUniformDistribution[n],
GeometricDistribution[p],
HypergeometricDistribution[n,néxitos,ntotal],
NegativeBinomialDistribution[r,p],
PoissonDistribution[ν].

• **Variables aleatorias continuas**

Realmente, es la misma idea que en el párrafo anterior. Comenzamos cargando el paquete de las distribuciones de variables continuas con,

In[72]:= <<**Statistics‘ContinuousDistributions‘**

Mathematica tiene definidas las distribuciones continuas más importantes (o más utilizadas) y, para cada una de ellas se puede obtener sus propiedades elementales como la función de densidad, la función de distribución, la media, la varianza, . . . Veamos en forma resumida la distribución Normal y obtengamos sus elementos con *Mathematica* :

La variable aleatoria *Normal* $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ es la más importante y de mayor uso de todas las distribuciones continuas de probabilidad. La apariencia gráfica de la distribución normal es una curva en forma de campana que se extiende sin límite tanto en la dirección positiva como en la negativa. El nombre de Normal, corresponde a que representa la mayoría de las variables físicas.

Se dice que una variable aleatoria X se encuentra normalmente distribuida si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde los parámetros μ y σ, como veremos, corresponden a la media y desviación típica.

La función de distribución de la normal, por tanto, viene dada por

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2 dt}$$

Obtengamos así, con *Mathematica*, las características de la normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

In[73]:= **Clear[dist]; dist=NormalDistribution[m,s]**
Out[73]:= NormalDistribution[m,s]

La Función de densidad:

In[74]:= **PDF[dist]**
Out[74]:= $\dfrac{E^{-\frac{(-m+x)^2}{2s^2}}}{\sqrt{2\pi}s}$

La Función de distribución:

In[75]:= **CDF[dist,x]**
Out[75]:= $\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Erf}[\frac{-m+x}{\sqrt{2}s]}\right)$

donde Erf representa la función Error.

La Media:

In[76]:= **Mean[dist]**
Out[76]:= m

La Varianza:

In[77]:= **Variance[dist]**
Out[77]:= s^2

La Desviación Típica:

In[78]:= **StandardDeviation[dist]**
Out[78]:= s

El dominio:

In[79]:= **Domain[dist]**
*Out[79]:=*Interval[{-∞,∞ }]

Los Cuantiles:

In[80]:= **Quantile[dist,q]**
*Out[80]:=*m+$\sqrt{2}$s InverseErf[0,-1+2 q]

La simetría:

In[81]:= **Skewness[dist]**
*Out[81]:=*0

La curtosis:

In[82]:= **Kurtosis[dist]**

*Out[82]:=*3

Ejemplo: Sea X una variable aleatoria que representa la inteligencia medida por medio de pruebas de coeficiente de inteligencia. Si X se distribuye según una variable aleatoria $\mathcal{N}(100, 10)$, obtén las siguientes probabilidades:

i) X sea mayor que 100.

In[83]:= **Clear[dist]; dist=NormalDistribution[100,10]**

Out[83]:= NormalDistribution[100,10]

la probabilidad será $P\{X > 100\} = 1 - P\{X \leq 100\} = 1 - F(100)$ por tanto,

In[84]:= **N[1-CDF[dist,100]]**

Out[84]:= 0.5

como era de esperar, puesto que 100 es la media.

ii) X sea menor que 85.

$P\{X < 85\} = P\{X \leq 85\} = F(85)$ por tanto,

In[85]:= **N[CDF[dist,85]]**

Out[85]:= 0.0668072

iii) X sea a lo más 112.

$P\{X \leq 112\} = F(112)$ por tanto,

In[86]:= **N[CDF[dist,112]]**

Out[86]:= 0.88493

iv) X esté entre 90 y 120.

$P\{90 \leq X \leq 120\} = F(120) - F(90)$ por tanto,

In[87]:= **N[CDF[dist,120]-CDF[dist,90]]**

Out[87]:= 0.818595

Finalmente, mostramos la lista de las distribuciones más utilizadas de variables aleatorias continuas que podemos obtener con *Mathematica*:

UniformDistribution[**m,n**],
ExponentialDistribution[λ],
GammaDistribution[**n,k**],
BetaDistribution[**p,q**],
NormalDistribution[μ,σ],
StudentDistribution[**n**],
WeibullDistribution[α,β],
RayleighDistribution[σ],
CauchyDistribution[**a,b**].

E 6.3.1 **Todos los días se seleccionan, de manera aleatoria, 15 unidades de un proceso de manufactura con el propósito de verificar el porcentaje de unidades defectuosas en la producción. La probabilidad de tener una unidad defectuosa es de 0.05. La gerencia, ha decidido detener la producción cada vez que una muestra de 15 unidades tenga 2 o más defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de que la producción se detenga?**

E 6.3.2 **En un departamento de control de calidad se inspeccionan las unidades terminadas que provienen de una línea de ensamble. Se piensa que la proporción de unidades defectuosas es de 0.05. ¿Cuál es la probabilidad de que la vigésima unidad inspeccionada sea la segunda que se encuentra defectuosa? ¿Cuál es la probabilidad de que la 15 unidad inspeccionada sea la tercera que se encuentra defectuosa?**

E 6.3.3 **Una variable aleatoria de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ verifica $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$. Halla el parámetro λ y la probabilidad de que X sea mayor que 3.**

E 6.3.4 **El peso de las personas de una cierta población, se distribuye normalmente con media $\mu = 72$ kg, y desviación típica $\sigma = 10$ kg. Cuatro personas entra en un ascensor, cuya carga máxima es de 350 kg. ¿Cuál es la probabilidad de que entre todos la superen?**

E 6.3.5 **Se consideran unas bombonas de butano cuya duración sigue una distribución $\mathcal{N}(220, 20)$. Se pide:**

i) Calcula la probabilidad de que una bombona dure más de 220 horas.

ii) ¿Qué duración se puede asegurar para una bombona con un 80 % de seguridad?

iii) ¿Cuál es la probabilidad de que con 25 bombonas podamos asegurar más de 5200 horas de funcionamiento?

iv) Calcula la probabilidad de que, de 4 bombonas, dos al menos duren entre 180 y 220 horas.

E 6.3.6 **El peso de los niños de 7 años de un colegio, se distribuye normalmente con media $\mu = 30$ kg, y desviación típica $\sigma = 4$ kg. Suponiendo que dos niños quieren jugar en un balancín y que podrán hacerlo si difieren en menos de 2 kg ¿Cuál es la probabilidad de puedan realmente jugar?**

Bibliografía

[A1989] Apóstol, T.M.: *Análisis Matemático*, Reverté.

[B1993] Blachman, N.: *Mathematica. Un enfoque práctico*, Ariel Informática.

[D1984] De Diego, B.: *Problemas de álgebra lineal*, Deimos.

[B1999] Wolfram, S.: *Mathematica 4.0 Standard Add-On Packages*, Cambridge University Press.

[B1999] Wolfram, S.: *The Mathematica Book*, Cambridge University Press, 4ª edition.